泉州市2018届普通高中毕业班单科质量检查

文科数学试题参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可在评卷组内讨论后根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步仅出现严谨性或规范性错误时，不要影响后续部分的判分；**当考生的解答在某一步出现了将影响后续解答的严重性错误时，后继部分的解答不再给分**．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算．每小题5分，满分60分．

（1）B	（2）D	（3）D	（4）C	（5）B	（6）A
（7）C	（8）B	（9）A	（10）C	（11）A	（12）A

（1）若复数 z 满足 $(1+\mathbf{i})\cdot z=2$，则其共轭复数 $\overline{z}=$

（A）$1-\mathbf{i}$　　（B）$1+\mathbf{i}$　　（C）$2-2\mathbf{i}$　　（D）$2+2\mathbf{i}$

命题意图：本小题主要考查共轭复数的概念及复数基本运算等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想等．

试题简析：$z=\dfrac{2}{1+\mathbf{i}}=\dfrac{2\cdot(1-\mathbf{i})}{(1+\mathbf{i})\cdot(1-\mathbf{i})}=1-\mathbf{i}$，所以 $\overline{z}=1+\mathbf{i}$．故选（B）．

错因预判：选择（A）的原因是没有注意到共轭复数，反应心理素质存在的缺陷，或对共轭复数的概念缺乏认识；选择（C）的原因是在分母实数化过程中，计算错误，并忘记共轭复数；选择（D）的原因是在分母实数化过程中，计算错误．

变式题源：2012年新课标全国卷文科第（2）题．

（2）若集合 $A=\{x\,|\,0<x<a,x\in\mathbf{N}\}$ 有且只有一个元素，则实数 a 的取值范围为

（A）$(1,2)$　　（B）$[1,2]$　　（C）$[1,2)$　　（D）$(1,2]$

命题意图：本小题主要考查集合的表示，元素与集合的关系等基础知识，考查推理论证能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等．

试题简析：集合 $A=\{x\mid 0<x<a,x\in\mathbf{N}\}$ 有且只有一个元素，所以 $A=\{1\}$．故选（D）.

错因预判：由于忽略了对区间端点的考虑，导致错选（A）（B）（C），反应思维不够严谨.

变式题源：2013 年新课标全国Ⅰ卷文科第（1）题.

（3）已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，$a_1+a_7=65$，$a_2a_6=64$，则公比 $q=$

（A）±4　　（B）4　　（C）±2　　（D）2

命题意图：本小题主要考查等比数列的概念与性质等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想.

试题简析：由 $\begin{cases}a_1+a_7=65,\\a_2a_6=64,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+a_7=65,\\a_1a_7=64,\end{cases}$ 又 $\{a_n\}$ 是递增数列，得 $\begin{cases}a_1=1,\\a_7=64,\end{cases}$ 故 $q=\sqrt[6]{\dfrac{64}{1}}=2$．故选（D）.

错因预判：由于审题不清，没有注意到递增这一关键信息，错选（A）（C）；选择（B）的原因是开方时运算错误.

变式题源：2015 年新课标全国Ⅱ卷文科第（9）题.

（4）已知 $a=\ln\dfrac{\pi}{3}$，$b=\ln\dfrac{\mathbf{e}}{3}$，$c=\mathbf{e}^{0.5}$，则

（A）$a>c>b$　　（B）$c>b>a$　　（C）$c>a>b$　　（D）$a>b>c$

命题意图：本小题主要考查指数函数、对数函数，比较数值大小的方法等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想.

试题简析：由 $\pi>3>\mathbf{e},0.5>0$，得 $\ln\dfrac{\mathbf{e}}{3}<0<\ln\dfrac{\pi}{3}<1<\mathbf{e}^{0.5}$．故选（C）.

错因预判：选择（A）的原因是 $\dfrac{\pi}{3}>1$，误解为 $\ln\dfrac{\pi}{3}>1$，又由 $0.5<1$，误解为 $0<\mathbf{e}^{0.5}<1$；选择（B）的原因是虽然 c 最大判断正确，但 a,b 的关系判断错误；选择（D）的原因是 a,b,c 的关系虽然判断正确，但最终不等号的方向判断错误.

变式题源：2016 年新课标全国Ⅰ卷文科第（8）题.

（5）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $2S_n=3a_n+1$，则 $a_4=$

（A）27　　（B）-27　　（C）$\dfrac{1}{27}$　　（D）$-\dfrac{1}{27}$

命题意图：本小题主要考查数列前n和项S_n与a_n关系，等比数列的定义、通项公式，递推关系等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查特殊与一般思想、函数与方程思想、转化与化归思想.

试题简析：$2S_n=3a_n+1$，$2S_{n-1}=3a_{n-1}+1(n\geq 2)$，

两式相减可得$2a_n=3a_n-3a_{n-1}$ 即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=3(n\geq 2)$，

当$n=1$时，$2S_1=3a_1+1$ 解得$a_1=-1$.

所以，$a_n=-3^{n-1}$，$a_4=-3^3=-27$．故选（B）.

错因预判：选择（A）的原因是错解为$a_1=1$；选择（C）（D）的原因是公比q错解为$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{3}$.

变式题源：2013年新课标全国I卷文科第（6）题.

（6）已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)+\cos\left(\pi x\right)$，则

（A）$y=f\left(x\right)$的周期为2，其图象关于直线$x=\dfrac{1}{4}$对称

（B）$y=f\left(x\right)$的周期为2，其图象关于直线$x=-\dfrac{1}{4}$对称

（C）$y=f\left(x\right)$的周期为1，其图象关于直线$x=\dfrac{1}{4}$对称

（D）$y=f\left(x\right)$的周期为1，其图象关于直线$x=-\dfrac{1}{4}$对称

命题意图：本小题主要考查三角函数图象与性质及恒等变换等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力，考查数形结合思想、函数与方程思想等.

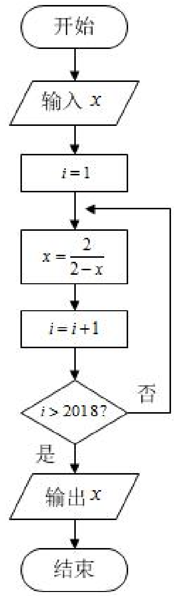
试题简析：$f\left(x\right)=\sin\left(\pi x\right)+\cos\left(\pi x\right)=\sqrt{2}\sin(\pi x+\dfrac{\pi}{4})$，$T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$；令$\pi x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，解得$x=\dfrac{1}{4}+k(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$时，得到图象的一条对称轴为$x=\dfrac{1}{4}$. 选（A）.

错因预判：选择（B）的原因是审题不清，混淆对称轴与对称中心的概念，错令$\pi x+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$

解得 $x=-\frac{1}{4}+k(k\in\mathbf{Z})$；选择（C）的原因是在函数解析式化简时错误地化为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2\pi x+\frac{\pi}{4})$，周期求解为 $T=\frac{2\pi}{2\pi}=1$；选择（D）的原因是前面两者错误的综合.

变式题源：2011 年新课标全国卷文科第（11）题.

（7）执行如图所示的程序框图，如果输入的 $x=3$，则输出的 $x=$



（A）3　　　　（B）-2

（C）$\frac{1}{2}$　　　　（D）$\frac{4}{3}$

命题意图：本小题主要考查循环结构、程序框图等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想等.

试题简析：通过列举发现 x 的周期变化规律，分析得到最终输出 $x=\frac{1}{2}$．故选（C）.

	$x=\frac{2}{2-x}$	$\mathbf{i}=\mathbf{i}+1$	$\mathbf{i}>2018$？
初始姿态	3	1	/
第 1 次循环后	-2	2	否
第 2 次循环后	$\frac{1}{2}$	3	否
第 3 次循环后	$\frac{4}{3}$	4	否
第 4 次循环后	3 （发现周期规律）	5	否
……	……	……	……
第 2017 次循环后	-2	2018	否
第 2018 次循环后	$\frac{1}{2}$	2019	是

错因预判：第一次循环的结果、循环的次数、周期的分析错误；或者数值的计算错误都有可能导致最终结果的错判.

变式题源：2015 年全国 I 卷文科第（9）题.

（8）在直角坐标系 xOy 中，P,Q 为单位圆 O 上不同的两点，P 的横坐标为 $\frac{1}{2}$，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，则 Q 的横坐标是

（A）-1　　（B）-1 或 $\frac{1}{2}$　　（C）$-\frac{1}{2}$　　（D）1 或 $-\frac{1}{2}$

命题意图：本小题主要考查三角函数的定义、向量的坐标运算、数量积、几何意义等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、分类与整合思想、化归与转化思想．

试题简析：

解法 1：根据三角函数的定义，$P(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$，先检验 $Q(1,0)$，显然不符合题意，排除（D）；再检验 $Q(-1,0)$，符合题意，排除（C）；最后检验 $Q(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$，符合题意．故选（B）．

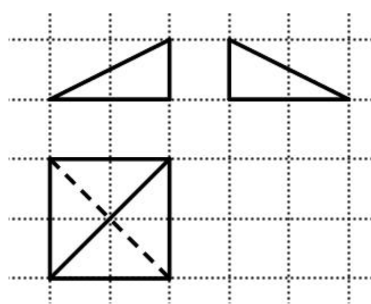
解法 2：根据三角函数的定义得 $P(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ 即 $P(\cos(\pm60^\circ),\sin(\pm60^\circ))$，由 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，可知 $\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$ 的夹角为 120°，即 $\overrightarrow{OQ}$ 是由 $\overrightarrow{OP}$ 顺（逆）时针旋转 120° 而得，直观发现 Q 的横坐标是 -1 或 $\frac{1}{2}$．故选（B）．

解法 3：依题意，$P(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$，设 $Q(a,b)$，由 $\sqrt{a^2+b^2}=1$ 及 $\frac{1}{2}a\pm\frac{\sqrt{3}}{2}b=-\frac{1}{2}$，可求得 Q 的横坐标是 -1 或 $\frac{1}{2}$．故选（B）．

错因预判：选择（A）的原因是分析不够严谨导致情况漏判；选择（D）的主要原因是计算中的符号弄错；选择（C）的原因是前面两种错误的综合．

变式题源：2010 年新课标全国卷文科第（6）题、2011 年新课标全国卷文科第（7）题．

（9）如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



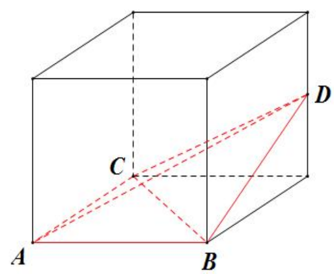
（A）$\frac{2}{3}$　　（B）2

（C）$\frac{4}{3}$　　（D）4

命题意图：本小题主要考查几何体的三视图、体积公式等基础

知识；考查空间想象能力、运算求解能力，考查化归与转化思想.

试题简析：由三视图可知该几何体为三棱锥$D-ABC$（如图所示），其中$AB=AC=2$，D到平面ABC的距离为1，故所求的三棱锥的体积为$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot1=\frac{2}{3}$．故选（A）.



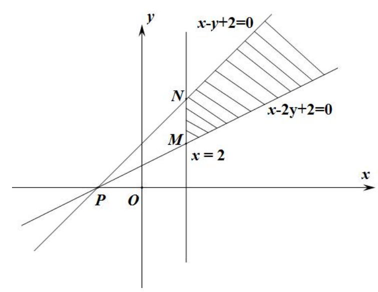
错选预判：选择（B）是因为三棱锥体积公式漏乘$\frac{1}{3}$；选择（C）是因为误认为所给几何体是一个底面边长为2，高为1的四棱锥；选择（D）是前面两个错误综合所致.

变式题源：2015年新课标全国Ⅱ卷文科第（6）题.

（10）设实数x,y满足条件$\begin{cases}x-y+2\geq0,\\x-2y+2\leq0,\\x\geq2,\end{cases}$则$z=3x+y$的最小值为

（A）-6　　（B）-2　　（C）8　　（D）10

命题意图：本小题考查二元一次不等式组表示的平面区域、线性目标函数的最值等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想，检测数学建模素养.



试题简析：依题意得平面区域如图阴影部分所示，由$z=3x+y$得$y=-3x+z$，在图中作直线$y=-3x$，并平行移动得到一系列平行直线，可知当直线过点$M(2,2)$时，所求的z值最小，最小值为$z=3\cdot2+2=8$．故选（C）.

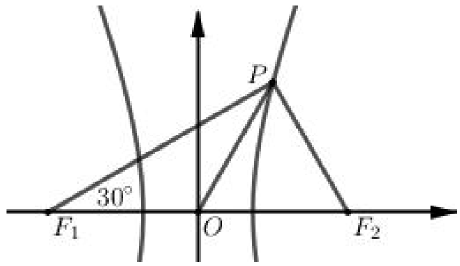
错选预判：选择（A）是因为误认为所给平面区域为三角形PMN内部及其边界，从而判定当平行直线$z=3x+y$经过点$P(-2,0)$时，所求的z值最小，即最小值为$z=3\cdot(-2)=-6$；或者学生并未作出平面区域，而是直接联立方程求出任意两条直线的交点坐标，并依次代入计算，求得z值最小值为$z=3\cdot(-2)=-6$；选择（B）的原因同上，最后代点计算时将横、纵坐标混淆导致出错；选择（D）的原因同上，同时看错题意，误认为求$z=3x+y$的最大值从而出错.

变式题源：　2017年新课标全国Ⅰ卷文科第（7）题.

（11）设点 F_1 为双曲线 C： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点，点 P 为 C 右支上的一点，点 O 为坐标原点．若 ΔOPF_1 是底角为 $30°$ 的等腰三角形，则 C 的离心率为

（A）$\sqrt{3}+1$　　（B）$\sqrt{3}-1$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

命题意图：本小题主要考查双曲线的定义、标准方程、几何性质等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等．



试题简析：如图，因为 ΔOPF_1 中 $|OF_1|=|OP|$ ，又因为 $|OF_2|=|OP|$ ，所以 ΔOPF_2 是等边三角形，故 $PF_1\perp PF_2$ ．由此可得，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，故选（A）．

错选预判：选择（B）的原因是混淆椭圆与双曲线的定义所致；选择（C）是因为错把 $|F_1F_2|$ 认为是 c 所致；选择（D）的原因是画图错误，得到错误的 a,c 关系式．

变式题源：2012年新课标全国卷文科第（4）题．

（12）设函数 $f(x)=\ln x-ax^2-(a-2)x$ ，若不等式 $f(x)>0$ 恰有两个整数解，则实数 a 的取值范围是

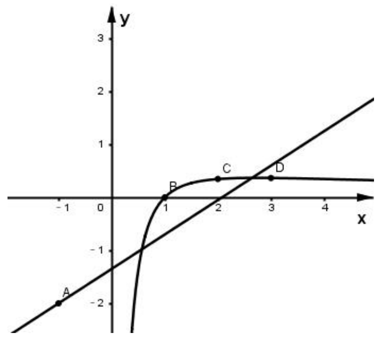
（A）$\left[\dfrac{6+\ln 3}{12},\dfrac{4+\ln 2}{6}\right)$　　（B）$\left(\dfrac{6+\ln 3}{12},\dfrac{4+\ln 2}{6}\right]$

（C）$\left[1,\dfrac{4+\ln 2}{4}\right)$　　（D）$\left(1,\dfrac{4+\ln 2}{4}\right]$

命题意图：本小题主要考查导数及其应用等基础知识，考查推理论证能力、运算求解能力，考查数形结合思想、函数与方程思想、分类与整合思想等．

试题简析：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>0\}$ ，不等式 $f(x)>0$ ，即 $\ln x>ax^2+(a-2)x$ ，

两边除以x，则$\dfrac{\ln x}{x}>a(x+1)-2$，注意到直线$l:y=a(x+1)-2$恒过定点$\left(-1,-2\right)$，函数$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$的图象如图所示；不等式$f(x)>0$恰有两个整数解，即函数$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$图象上恰有两个横坐标为整数的点落在直线$y=a(x+1)-2$的上方，由图象可知，这两个点分别为$B\left(1,0\right)$，$C\left(2,\dfrac{\ln 2}{2}\right)$. 所以直线$l$的斜率$a$的取值范围为$\dfrac{\frac{\ln 3}{3}-\left(-2\right)}{3-\left(-1\right)}\le a<\dfrac{\frac{\ln 2}{2}-\left(-2\right)}{2-\left(-1\right)}$，即$\dfrac{\ln 3+6}{12}\le a<\dfrac{\ln 2+4}{6}$．故选（A）.



错选预判：选择（B）的原因是取特殊值试错求解过程中，未能对区间端点进行检验，导致出错；选择（C）（D）是未能发现$a\ge 1$时，对任意$x>1$，$f(x)=\ln x-ax^2-(a-2)x<0$恒成立.

变式题源：2015年新课标全国I卷理科第（12）题.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．将答案填在答题卡的相应位置.

（13）已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(3,4\right)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\left(1,2\right)$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________．5

命题意图：考查平面向量基本概念、基本运算，数量积的坐标运算等基础知识；考查运算求解能力，考查转化与化归思想.

试题简析：

解法1：依题意得$\boldsymbol{a}=\left(2,3\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(1,1\right)$，所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+3\times1=5$.

解法2：$\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)^2-\left(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)^2=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，故$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(3^2+4^2\right)-\left(1^2+2^2\right)=20$，故$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$.

变式题源：2015年新课标全国II卷文科第（4）题.

（14）若函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-1}+1, x>1,\\ 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}, x<1,\end{cases}$ 则$f(a)+f(2-a)=$________．2

命题意图：考查分段函数、指数函数的图象与性质等基础知识, 考查运算求解能力，考查数形结合思想、转化与化归思想.

试题简析：$x>1$时，$f(x)+f(2-x)=2^{x-1}+1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x-1}=2^{x-1}+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}=2$，同理$x<1$也成立，故$f(a)+f(2-a)=2$.（或通过作图象简图，初步判断图象关于$(1,1)$对称，从而可得解.）

变式题源：2017年新课标全国III卷文科（16）题.

（15）若二次函数$f(x)=ax^2-x+b$的最小值为0，则$a+4b$的取值范围为______. $[2,+\infty)$

命题意图：本小题考查二次函数最值、均值不等式等基础知识，考查推理论证能力，考查数形结合思想、化归与转化思想等.

试题简析：由已知可得$a>0$，且判别式$\Delta=1-4ab=0$，即$ab=\frac{1}{4}$，

所以$a+4b\geq 2\sqrt{4ab}=2$. 即所求$a+4b$的取值范围为$[2,+\infty)$.

变式题源：2015年新课标全国I卷文科（21）题

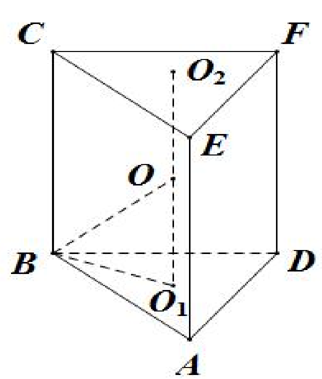
（16）在三棱锥$A\text{-}BCD$中，$AC=CD=\sqrt{2}$，$AB=AD=BD=BC=1$，若三棱锥的所有顶点都在同一个球面上，则球的表面积是________. $\frac{7\pi}{3}$

命题意图：本小题考查空间中点、线、面的位置关系，考查与球有关的切接问题及球的表面积公式等基础知识，考查几何图形的作图、识图能力，考查空间想象能力，考查化归与转化思想.

试题简析：

解法一：由已知可得$BC\perp AB, BC\perp BD$，所以$BC\perp$平面ABD，

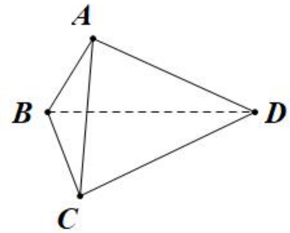
如图，将三棱锥$A\text{-}BCD$补形为三棱柱$ABD-CEF$，则三棱锥$A\text{-}BCD$的外接球即为三棱柱$ABD-CEF$的外接球，



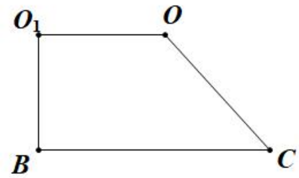
设三棱柱外接球的球心为O，正三角形ABD的中心为O_1，正三角形CEF的中心为O_2，则$O_1O_2=BC=1$，O为O_1O_2的中点，连接BO, BO_1，在$Rt\Delta OO_1B$中，$OO_1=\frac{1}{2}$，$BO_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故所求$OB^2=OO_1{}^2+BO_1{}^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$，故所求球的表面积为$\frac{7\pi}{3}$.

解法二：由已知可得$BC\perp AB,BC\perp BD$，所以$BC\perp$平面ABD，



设三棱锥外接球的球心为O，正三角形ABD的中心为O_1，则$OO_1\perp$平面ABD，连结O_1B,OO_1,OC，在直角梯形O_1BCO中，有$O_1B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$BC=1$，$OC=OB=R$，可得$R^2=\frac{7}{12}$，故所求球的表面积为$\frac{7\pi}{3}$.



变式题源：2017年新课标全国Ⅰ卷（16）题.

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分**10**分）

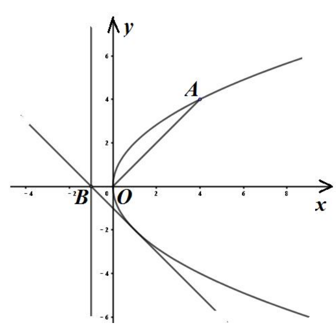
在平面直角坐标系xOy中，点$A(4,4)$在抛物线$C:y^2=2px\ (p>0)$上.

（Ⅰ）求C的方程和C的焦点F的坐标；

（Ⅱ）设点B为准线与x轴的交点，直线l过点B，且与直线OA垂直，求证：l与C相切.

命题意图：本题主要考查抛物线的标准方程、直线与抛物线的位置关系等基础知识,考查推理论证能力、运算求解能力,考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想.

试题解析：



（Ⅰ）因为点$A(4,4)$在抛物线$C:y^2=2px$上，

所以$16=8p$，解得$p=2$． ……………………2分

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$，……………………3分

焦点F的坐标$(1,0)$. …………………5分

（Ⅱ）准线：$x=-1$与x轴的交点$B\left(-1,0\right)$，…………6分

直线OA的斜率$k=1$， ……………………7分

所以直线l的方程：$y-0=-\left[x-\left(-1\right)\right]$，即$x+y+1=0$，……………………8分

由方程组$\begin{cases}x+y+1=0\\y^2=4x\end{cases}$联立消去$x$，可得$y^2+4y+4=0$. …………………9 分

因为$\Delta=b^2-4ac=16-16=0$，所以l与C相切. …………………10 分

评分说明：第（Ⅰ）问只写出抛物线的焦点为$(\frac{p}{2},0)$，给 2 分.

变式题源：2017 年新课标全国Ⅰ卷第（20）题.

（18）（本小题满分 12 分）

等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_2=4$，$S_5=30$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和.

命题意图：本题考查等差数列的性质与通项公式、前n项和公式、数列求和等基础知识，考查运算求解能力，查函数与方程思想、化归与转化思想.

试题解析：

解法一：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

依题可知$a_2=a_1+d=4$，$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=30$，……………………3 分

解得$a_1=2$，$d=2$， ……………………4 分

故$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times2=2n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ ………………6 分

（只直接正确写出$a_n=a_1+\left(n-1\right)d$和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$中的一个给 1 分，正确写出两个给 3 分）.

（Ⅱ）因为$s_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$， …………………8 分

所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$， …………………10 分

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$

$$=1-\frac{1}{(n+1)}=\frac{n}{n+1}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 12\text{分}$$

解法二：（Ⅰ）由已知可得 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=30$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2 分

又 $a_2=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_3-a_2=2$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$4 分

故 $a_n=a_2+(n-2)d=4+2(n-2)=2n(n\in\mathbf{N}^*)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$6 分

（Ⅱ）同解法一.

评分说明：（Ⅰ）设数列的首项 a_1 与公差 d 可给 1 分，能用首项 a_1 与 d 公差表示 a_2 与 S_5 可给 1 分，通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 书写正确，但未代入具体值可给 1 分；

（Ⅱ）写出 $s_n=\frac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$ 或 $s_n=na_1+\frac{n(n+1)}{2}d$ 可给 1 分；有裂项操作的，无论是在通项裂项，还是在具体项中裂项，都给相应的裂项分 2 分，最后结果未化简不扣分.

变式题源：2013 年全国课标卷文科数学第（1）题.

（19）（本小题满分 12 分）

已知 a,b,c 分别为 ΔABC 内角 A,B,C 的对边，$a=2c$.

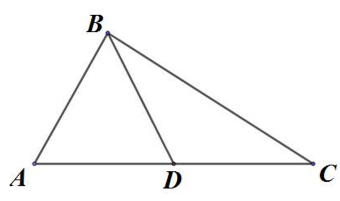
（Ⅰ）若 $B=\frac{\pi}{2}$，D 为 AC 的中点，求 $\cos\angle BDC$；

（Ⅱ）若 $a^2+2(b^2-2c^2)\cos A=b^2+c^2$，判断 ΔABC 的形状，并说明理由.

命题意图：本题主要考查二倍角公式、诱导公式、同角三角函数关系、正弦定理、余弦定理、解三角形等基础知识,考查推理论证能力、运算求解能力,考查化归与转化思想、分类讨论思想、数形结合思想、函数与方程思想.

试题解析：

（Ⅰ）依题意，由 $B=\frac{\pi}{2}$，$a=2c$ 可得 $\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cdots\cdots\cdots$2 分



D 为 AC 的中点，$B=\frac{\pi}{2}$，故 $BD=AD$，

所以 $\angle BDC=2A$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$4 分

故$\cos\angle BDC=\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\dfrac{3}{5}$.　　　　　　………………6 分

（Ⅱ）因为$2(b^2-2c^2)\cos A=b^2+c^2-a^2$，

由余弦定理可得$2(b^2-2c^2)\cos A=2bc\cos A$． …………………………8 分

①$\cos A=0$时，$A=\dfrac{\pi}{2}$，ΔABC为直角三角形；……………………9 分

②当$2(b^2-2c^2)=2bc$时，即$b^2-bc-2c^2=0$，$(b+c)(b-2c)=0$，

因为$b,c>0$，故$b=2c$，

又$a=2c$，故$a=b$，ΔABC为等腰三角形．…………………………10 分

③因为$a=2c$，所以$b=2c$与$A=\dfrac{\pi}{2}$不可能同时成立，

故ΔABC不可能是等腰直角三角形．　　　　　………………………11 分

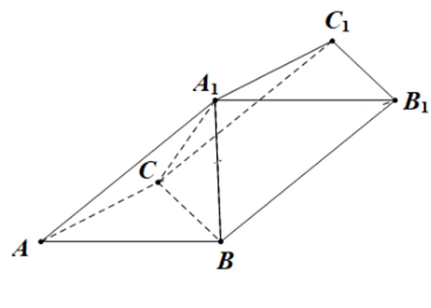
综上所述，ΔABC为等腰三角形或直角三角形，但不可能是等腰直角三角形．…12 分

评分说明：（Ⅰ）第一问解法多样，有不同解法的，可酌情给分；（Ⅱ）能正确写出正弦公式或余弦公式给 2 分；有猜测判断的，每个正确的猜测判断各给1分；三种分类不一定按照参考答案的顺序讨论，第一种讨论或者只写一种讨论，正确的给 2 分.

变式题源：2012 年全国课标卷文数第（17）题、2015 年全国课标Ⅱ卷文数第（17）题.

（20）（本题满分12分）

如图，在三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，平面$A_1BC\perp$平面ABC，且ΔABC和ΔA_1BC均为正三角形.



（Ⅰ）在B_1C_1上找一点P，使得$A_1P\perp$平面A_1BC，并说明理由.

（Ⅱ）若ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，求四棱锥$A_1\text{-}BCC_1B_1$的体积.

命题意图：本题主要考查几何体的体积及直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力；考查数形结合思想、化归与转

化思想.

试题解析：

解法一：（Ⅰ）P 为 B_1C_1 的中点时，$A_1P\perp$ 平面 A_1BC. ………………………1 分

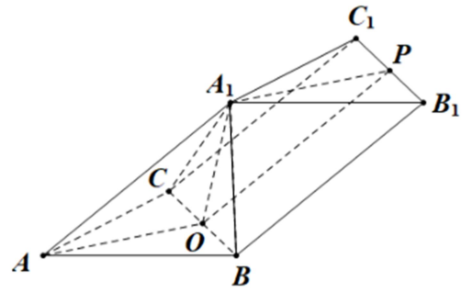
理由如下：

如图，取 BC 的中点 O，B_1C_1 的中点 P，连结 A_1P, A_1O, AO, OP，

在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$A_1A // B_1B // OP, A_1A = OP$，…2 分

所以四边形 A_1AOP 为平行四边形，$A_1P // AO$. ……………………3 分

由已知，ΔABC 为正三角形，所以 $AO\perp BC$. ……4 分



因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABC = BC$，$AO\subset$ 平面 ABC，

所以 $AO\perp$ 平面 A_1BC，……5 分

所以 $A_1P\perp$ 平面 A_1BC. ……………………6 分

（Ⅱ）设 ΔABC 的边长为 a，则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$，

所以 $a=2$，$AO=\sqrt{3}$. ………………………………………………7 分

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为三棱锥 $A_1\text{-}ABC$ 体积的 3 倍，

所以四棱锥 $A_1\text{-}BCC_1B_1$ 的体积等于三棱锥 $A_1\text{-}ABC$ 体积的 2 倍，…10 分

即 $V_{A_1\text{-}BCC_1B_1}=2V_{A_1\text{-}ABC}=2V_{A-A_1BC}=2\times\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=2$. ……………12 分

解法二：（Ⅰ）同解法一.

（Ⅱ）取 OP 中点 Q，连接 A_1Q，

在等腰直角三角形 OA_1P 中，有 $A_1Q\perp OP$ …………7 分

由（Ⅰ）知 $BC\perp AO, BC\perp A_1O$，且 $AO\cap A_1O=O, AO, A_1O\subset$ 面 A_1AOP，

所以 $BC \perp$ 面 A_1AOP，从而 $BC \perp A_1Q$ ……………………………………8 分

而 $BC \cap OP = O, BC, OP \subset$ 面 BCC_1B_1，故 $A_1Q \perp$ 面 BCC_1B_1 ………9 分

设 ΔABC 的边长为 a，则 $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$，所以 $a = 2$， ………10 分

故四棱锥 A_1 - BCC_1B_1 的体积

$$V_{A_1\text{-}BCC_1B_1} = \frac{1}{3} \times BC \times OP \times A_1Q = \frac{1}{3} \times BC \times A_1P \times A_1O = \frac{1}{3} \cdot a \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 = 2.$$

……………12 分

变式题源：2016 年新课标全国Ⅰ卷文科数学第（18）题.

（21）（本题满分 12 分）

椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$ 经过 $A\left(a,0\right)$，$B\left(0,1\right)$，O 为坐标原点，线段 AB 的中点在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上.

（Ⅰ）求 C 的方程;

（Ⅱ）直线 $l: y = kx + m$ 不过曲线 C 的右焦点 F，与 C 交于 P，Q 两点，且 l 与圆 O 相切，切点在第一象限，ΔFPQ 的周长是否为定值？并说明理由.

命题意图：本题主要考查椭圆的标准方程及简单的几何性质，直线与圆和椭圆的位置关系等基础知识，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想.

试题解析：

解法一：（Ⅰ）由题意得 $b = 1$， ……………………1 分

由题意得，AB 的中点 $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 在圆 O 上， …………2 分

所以 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$，得 $a = \sqrt{3}$. …………3 分

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……………………4 分

（Ⅱ）依题意可设直线$PQ:y=kx+m$，

因为直线PQ与圆O相切，且切点在第一象限，

所以$k<0$，$m>0$，且有$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，$m^2=1+k^2$……………6 分

设$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_1,y_1\right)$，

将直线PQ与椭圆方程联立，

可得$\left(3k^2+1\right)x^2+6kmx+3\left(m^2-1\right)=0$. …………………7 分

$\Delta=36k^2m^2-12\left(3k^2+1\right)\left(m^2-1\right)=12\left(3k^2-m^2+1\right)=24k^2>0$ ，

且$x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}$ ，$x_1\cdot x_2=\frac{3\left(m^2-1\right)}{3k^2+1}$. ……………………………………8 分

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$，

$=\frac{\sqrt{12}\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1}\sqrt{3k^2+1-m^2}$. ………………………………9 分

因为$m^2=1+k^2$，故$|PQ|=\frac{\sqrt{12}\sqrt{m^2}}{3k^2+1}\sqrt{2k^2}=-\frac{2\sqrt{6}mk}{3k^2+1}$.

另一方面$|PF|=\sqrt{\left(x_1-\sqrt{2}\right)^2+{y_1}^2}$ ，………………………………10 分

$=\sqrt{{x_1}^2-2\sqrt{2}x_1+2+{y_1}^2}$

$=\sqrt{{x_1}^2-2\sqrt{2}x_1+2+\left(1-\frac{{x_1}^2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{2}{3}{x_1}^2-2\sqrt{2}x_1+3}$.

化简得$|PF|=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}x_1$，……………………………11 分

同理$|QF|=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}x_2$，可得$|PF|+|QF|=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\left(x_1+x_2\right)$.

由此可得，ΔFPQ 的周长$=-\dfrac{2\sqrt{6}mk}{3k^2+1}+2\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{-6km}{3k^2+1}=2\sqrt{3}$．

故ΔFPQ 的周长为定值$2\sqrt{3}$，本题得证．…………………12 分

（说明：本小题中直接回答ΔFPQ 的周长为定值$2\sqrt{3}$，给 1 分）

解法二：（Ⅰ）由题意的$b=1$，　…………………………………………1 分

记$\mathbf{R}t\Delta AOB$ 斜边中点T，可得$TA=TB$，

由题意得$OT=OB=1$，故ΔBOT 为等边三角形，……………………2 分

所以$a=\sqrt{3}b$，故$a=\sqrt{3}$．　……………………………………………3 分

所以椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$．…………………………………………4 分

（Ⅱ）同解法一．

22．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\mathbf{e}^x-ax$．

（Ⅰ）设$F(x)=f(x)-a$，若曲线$y=F(x)$在$(0,F(0))$处的切线恒过定点A，求A的坐标；

（Ⅱ）设$f'(x)$为$f(x)$的导函数．当$x\ge 1$时，$f(x)-f'(1)\ge 1-\dfrac{1}{x}$，求$a$的取值范围．

试题解析：（Ⅰ）依题意，$F(x)=\mathbf{e}^x-ax-a$，$F'(x)=\mathbf{e}^x-a$．……………1 分

$F(0)=1-a$，$F'(0)=1-a$．　…………………………………2 分

则曲线$F(x)$在$(0,F(0))$处切线为$y-(1-a)=(1-a)x$，

即$y=(1-a)(x+1)$．　……3 分

故切线必过的定点$A(-1,0)$．……………………………………4 分

（Ⅱ）设$g(x)=f(x)-f'(1)-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\mathbf{e}^x+\dfrac{1}{x}-ax+(a-\mathbf{e}-1)$．

则$g'(x)=\mathbf{e}^x-\dfrac{1}{x^2}-a$．　…………5 分

设 $h(x)=\mathbf{e}^x-\dfrac{1}{x^2}-a$，则 $h'(x)=\mathbf{e}^x+\dfrac{2}{x^3}$.　　…………6 分

因为 $h'(x)=\mathbf{e}^x+\dfrac{2}{x^3}>0$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，

所以 $h(x)=\mathbf{e}^x-\dfrac{1}{x^2}-a$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g'(x)=h(x)\geq h(1)=\mathbf{e}-1-a$. …………8 分

①当 $\mathbf{e}-1-a\geq 0$，即 $a\leq \mathbf{e}-1$ 时，$g'(x)\geq 0$，

故 $g(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)\geq g(1)=0$.

故 $a\leq \mathbf{e}-1$ 符合题意.　　………10 分

②当 $\mathbf{e}-1-a<0$，即 $a>\mathbf{e}-1$ 时，取 $h(a)=\mathbf{e}^a-\dfrac{1}{a^2}-a$.

设 $k(a)=\mathbf{e}^a-\dfrac{1}{a^2}-a$.

因为 $k'(a)=\mathbf{e}^a+\dfrac{2}{a^3}-1>0$ 在 $a\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $k(a)$ 在 $a\in(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $k(a)>k(\mathbf{e}-1)>k(1)=\mathbf{e}-2>0$，即 $h(a)=\mathbf{e}^a-\dfrac{1}{a^2}-a>0$，

又因为 $h(1)=\mathbf{e}-1-a<0$，且 $h(x)$ 在 $x\in[1,+\infty)$ 上单调递增，

由零点判定定理知，$\exists x_0\in(1,a)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $g'(x_0)=0$，…11 分

	$(1,x_0)$	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	小于0	大于0
$g(x)$	单调递减	单调递增

故存在 $x\in(1,x_0)\subseteq[1,+\infty)$，使得 $g(x)\leq g(1)=0$，不符合题意，舍去.

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,\mathbf{e}-1]$. …………12 分

变式题源：2016 年新课标全国Ⅱ卷文科数学第（20）题；2017 年新课标全国Ⅱ卷文科数学第（21）题.