

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟. 请将答案填在答题卡上.

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的. 请将答案填涂在答题卷的相应位置上.

- 已知命题 $p: \exists c > 0$, 使方程 $x^2 - x + c = 0$ 有解, 则 $\neg p$ 为 ()

A. $\forall c > 0$, 使方程 $x^2 - x + c = 0$ 无解 B. $\forall c \leq 0$, 使方程 $x^2 - x + c = 0$ 有解

C. $\exists c > 0$, 使方程 $x^2 - x + c = 0$ 无解 D. $\exists c \leq 0$, 使方程 $x^2 - x + c = 0$ 有解
- 设 $x \in \mathbf{R}$, 向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| =$ ()

A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 1
- 如图, 茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩 (单位: 分). 已知甲组数据的中位数为 15, 乙组数据的平均数为 16.8, 则 $x + y$ 的值为 ()

| | |
|-------------|---|
| 甲 | 乙 |
| 9 0 9 | |
| x 2 1 5 y 8 | |
| 7 4 2 4 | |

A. 8 B. 10 C. 11 D. 13
- 下列判断中, 正确的有: ()

① 一个命题的逆命题为真, 它的否命题也一定为真;

② 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\angle B = 60^\circ$ ” 是 “ $\angle A, \angle B, \angle C$ 三个角成等差数列” 的充要条件;

③ $\begin{cases} x > 1 \\ y > 2 \end{cases}$ 是 $\begin{cases} x + y > 3 \\ xy > 2 \end{cases}$ 的充要条件;

④ “ $am^2 < bm^2$ ” 是 “ $a < b$ ” 的必要不充分条件.

A. ①② B. ①③ C. ①④ D. ②③
- 如图是计算 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{20}$ 的值得一个程序图, 其中在判断框中应填入的条件是 ()


```

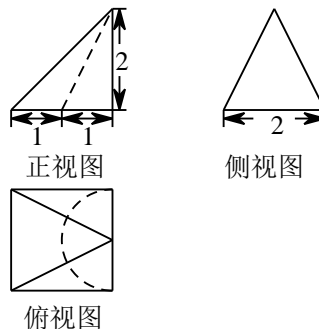
            graph TD
            Start([开始]) --> Init[S = 0, i = 1]
            Init --> Loop(( ))
            Loop --> Sum[S = S + 1/2i]
            Sum --> Inc[i = i + 1]
            Inc --> Loop
            Loop -- 是 --> Output[/输出 S/]
            Loop -- 否 --> End([结束])
            
```

A. $i < 10$ B. $i > 10$ C. $i < 20$ D. $i > 20$
- 已知 l, m, n 是三条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则 $\alpha \perp \beta$ 的一个充分条件是 ()

A. $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 且 $l \perp m$ B. $l \subset \alpha, m \subset \beta, n \subset \beta$, 且 $l \perp m, l \perp n$

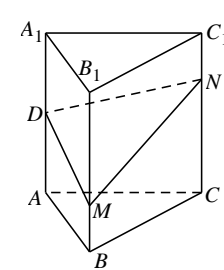
C. $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel n$, 且 $l \perp m$ D. $l \subset \alpha, l \parallel m$, 且 $m \perp \beta$
- 将一颗骰子投掷两次, 第一次、第二次出现的点数分别记为 a, b , 设直线 $l_1: ax + by = 2$ 与 $l_2: x + 2y = 2$ 平行的概率为 P_1 , 相交的概率为 P_2 , $P_2 - P_1 =$ ()

A. $-\frac{5}{6}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{31}{36}$ D. $-\frac{31}{36}$

- 某空间几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()
 

A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{8-\pi}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{7-\pi}{3}$
- 为了保障游泳爱好者的安全, 每个游泳池都需配备一名救护员. 某游泳池是一个长 30 米, 宽 10 米的长方形, 救护员沿着泳池边沿巡逻. 由于游泳池内人声嘈杂, 救护员只能听到以遇险者为中心, 13 米为半径范围内的呼救声, 现有一名遇险者恰好位于泳池中心, 则救护员能听到呼救声的概率为 ()

A. $\frac{169\pi}{300}$ B. $\frac{13}{40}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{8}$
- 已知直线 $x + y - k = 0 (k > 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于不同的两点 A, B , O 是坐标原点, 且有 $|\vec{OA} + \vec{OB}| \geq \frac{\sqrt{3}}{3} |\vec{AB}|$, 那么 k 的取值范围是 ()

A. $(\sqrt{3}, +\infty)$ B. $[\sqrt{2}, +\infty)$ C. $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ D. $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$
- 如图, 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各条棱长均相等, D 为 AA_1 的中点, M, N 分别是线段 BB_1 和线段 CC_1 上的动点 (含端点), 且满足 $BM = C_1N$. 当 M, N 运动时, 下列结论中不正确的是 ()
 

A. 平面 $DMN \perp$ 平面 BCC_1B_1

B. 三棱锥 $A_1 - DMN$ 的体积为定值

C. $\triangle DMN$ 可能为直角三角形

D. 平面 DMN 与平面 ABC 所成的锐二面角范围为 $(0, \frac{\pi}{4}]$
- 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{2}{2 \cdot a^{x-1} + 1}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $mf(x) \leq 2^x + 2$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 5 + 2\sqrt{6}]$ B. $(-\infty, 5 + 2\sqrt{6})$ C. $(-\infty, 6]$ D. $(-\infty, 6)$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

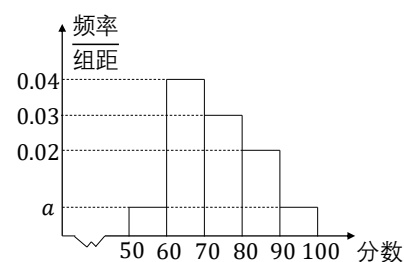
- 二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卷相应的横线上.
- 下表是降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x (吨) 与相应的生产能耗 y (吨标准煤) 的几组对照数据, 根据上表提供的数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y = 0.75x + 0.35$, 那么表中 $m =$ _____.
- | | | | | |
|-----|-----|-----|---|-----|
| x | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | 2.5 | m | 4 | 4.5 |
- 已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 的夹角为 60° , 且 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2$, 则向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 在向量 \mathbf{a} 方向上的投影为 _____.
 - 袋中有大小形状相同的红球, 黑球各一个, 现依次有放回的随机摸去 3 次, 每次摸取一球, 若摸到红球时得 2 分, 摸到黑球时得 1 分, 则 3 次摸球所得总分为 5 的概率为 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 是一个面积较大的三角形, 点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点且 $\vec{PB} + \vec{PC} + 2\vec{PA} = \mathbf{0}$, 现将3000粒黄豆随机抛在 $\triangle ABC$ 内, 则落在 $\triangle PBC$ 内的黄豆数大约是_____.

三、解答题: 本大题共6小题, 总分70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分) 给出命题 $p: a(1-a) > 0$, 命题 $q: y = x^2 + (2a-3)x + 1$ 与 x 轴交于不同的两点, 如果命题“ $p \vee q$ ”为真, “ $p \wedge q$ ”为假. 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分12分) 某校100名学生期中考试物理成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: [50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100].



(1) 求图中物理成绩的众数及 a 的值;

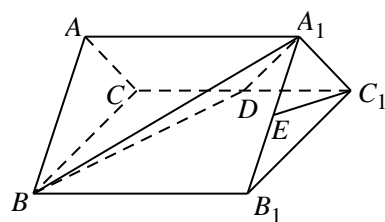
(2) 根据频率分布直方图, 估计这100名学生的物理成绩的平均分和中位数

(中位数要求精确到小数点后一位).

19. (本小题满分12分) 如图所示, 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=2$, D 为 CC_1 的中点, E 为 A_1B_1 的中点.

(1) 求证: $C_1E \parallel$ 面 A_1BD ;

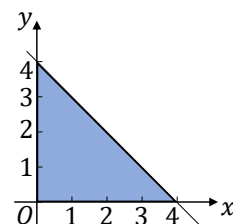
(2) 若 $AB_1 \perp$ 面 A_1DB , 求二面角 $B-A_1D-B_1$ 的余弦值.



20. (本小题满分12分) 将甲、乙两颗骰子先后各抛一次, a, b 分别表示抛掷甲、乙两颗骰子所出现的点数. 图中三角形阴影部分的三个顶点为 $(0, 0)$, $(4, 0)$ 和 $(0, 4)$

(1) 若点 $P(a, b)$ 落在如图阴影所表示的平面区域(包括边界)的事件记为 A , 求事件 A 的概率;

(2) 若点 $P(a, b)$ 落在 $x+y=m$ (m 为常数)上, 且使此事件的概率 P 最大, 求 m 和 P 的值.



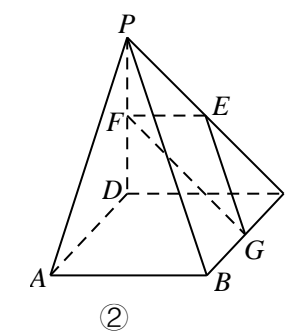
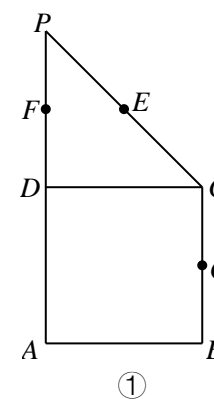
21. (本小题满分12分)

如图①在直角梯形 $ABCP$ 中, $BC \parallel AP$, $AB \perp BC$, $CD \perp AP$, $AD=DC=PD=2$, E, F, G 分别是线段 PC, PD, BC 的中点, 现将 $\triangle PDC$ 折起, 使平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$ (如图②)

(I) 求证 $AP \parallel$ 平面 EFG ;

(II) 求二面角 $G-EF-D$ 的大小;

(III) 在线段 PB 上确定一点 Q , 使 $PC \perp$ 平面 ADQ , 试给出证明.



22. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 观察程序框图, 若 $k=5$, $k=10$ 时, 分别有 $S = \frac{5}{11}$ 和 $S = \frac{10}{21}$.

(1) 试求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = 3^n \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

