炎德·英才大联考湖南师大附中 2018 届高三月考试卷(五)

数　学(文科)

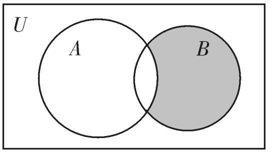
命题人、审题人:彭萍　苏萍　曾克平

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 10 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设全集 $U=\mathbf{N}^*$,集合 $A=\{1,2,3,5\}$,$B=\{2,4,6\}$,则图中的阴影部分表示的集合为　(B)



(A)$\{2\}$　　(B)$\{4,6\}$

(C)$\{1,3,5\}$　　(D)$\{2,4,6\}$

【解析】由韦恩图可知阴影部分表示的集合为$(\complement_U A)\cap B$,$\therefore(\complement_U A)\cap B=\{4,6\}$. 故选 B.

(2)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,5)$,若$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}$ 的坐标可以是　(D)

(A)$(-2,3)$　　(B)$(-2,-3)$

(C)$(4,-4)$　　(D)$(4,4)$

【解析】$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,1)$,设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,

$\because(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,$\therefore(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-x+y=0$,即 $x=y$.

只有 D 满足上述条件,故选:D.

(3)已知直线 m,n 与平面 α,β,γ 满足 $\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=m$,$n\perp\alpha$,$n\subset\gamma$,则下列判断一定正确的是　(D)

(A)$m/\!/\gamma$,$\alpha\perp\gamma$　　(B)$n/\!/\beta$,$\alpha\perp\gamma$

(C)$\beta/\!/\gamma$,$\alpha\perp\gamma$　　(D)$m\perp n$,$\alpha\perp\gamma$

【解析】因为 $n\perp\alpha$,则 $\alpha\perp\gamma$;同时 $n\perp\alpha$,$m\subset\alpha$,则 $m\perp n$,所以 D 选项是正确的;对于 A 选项中的直线 m 与平面 γ 的位置关系无法判断,B 选项中的直线 n 也可能落在平面 β 内;C 选项中的平面 β 与平面 γ 也可能相交,故答案选 D.

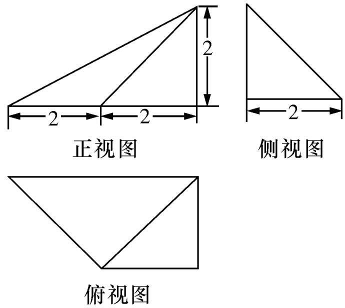
(4)下面为一个求 20 个数的平均数的程序,在横线上应填充的语句为　(D)

```
S=0
i=1
WHILE ______
INPUT  x
S=S+x
i=i+1
WEND
a=S/20
PRINT  a
END
```

(A)i>20　　(B)i<20　　(C)i>=20　　(D)i<=20

【解析】根据题意为一个求 20 个数的平均数的程序,则循环体需执行 20 次,从而横线上应填充的语句为 i<=20. 故选:D.

(5)某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积是 (B)

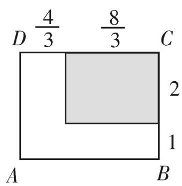


(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

【解析】由题意,几何体为四棱锥,其中底面是上底为 2,下底为 4,高为 2 的直角梯形,棱锥的高为 2,所以体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\times2=4$;故选 B.

(6)在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,$AD=3$,若向该矩形内随机投一点 P,那么使得$\triangle ABP$ 与$\triangle ADP$ 的面积都不小于 2 的概率为 (D)

(A)$\frac{1}{4}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{4}{7}$　　(D)$\frac{4}{9}$



【解析】由题意知本题是一个几何概型的概率,以 AB 为底边,要使面积不小于 2,由于 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\times h=2h$,则三角形的高要 $h\geqslant1$,同样,P 点到 AD 的距离要不小于 $\frac{4}{3}$,满足条件的 P 的区域如图,其表示的区域为图中阴影部分,它的面积是整个阴影矩形的面积 $\left(4-\frac{4}{3}\right)(3-1)=\frac{16}{3}$,∴使得$\triangle ABP$ 与$\triangle ADP$ 的面积都不小于 2 的概率为:$\frac{\frac{16}{3}}{4\times3}=\frac{4}{9}$;故选 D.

(7)已知 $\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,则 $\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)=$ (A)

(A)$-\frac{7}{9}$　　(B)$-\frac{1}{9}$　　(C)$\frac{1}{9}$　　(D)$\frac{7}{9}$

【解析】∵$\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,

∴$\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2\alpha\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)=\frac{7}{9}$,

∴$\cos\left(2\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{2\pi}{5}-2\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}-2\alpha\right)=-\frac{7}{9}$,故选:A.

(8)已知函数 $y=f(x)$对任意自变量 x 都有 $f(x)=f(2-x)$,且函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调.若数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,且 $f(a_6)=f(a_{2\,012})$,则$\{a_n\}$的前 2 017 项之和为 (B)

(A)0　　(B)2 017　　(C)2 016　　(D)4 034

【解析】∵函数 $y=f(x)$对任意自变量 x 都有 $f(x)=f(2-x)$,且函数 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调.

又∵$f(a_6)=f(a_{2\,012})$,∴$a_6+a_{2\,012}=2$,

又数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,

∴$a_6+a_{2\,012}=a_1+a_{2\,017}$,

则$\{a_n\}$的前 2017 项之和$=\frac{2017(a_1+a_{2017})}{2}=2017\times\frac{2}{2}=2017$.故选:B.

(9)已知$\triangle ABC$的面积为1，内切圆半径也为1，若$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c，则$\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$的最小值为 (D)

(A)2 (B)$2+\sqrt{2}$ (C)4 (D)$2+2\sqrt{2}$

【解析】$\because\triangle ABC$的面积为1，内切圆半径也为1，$\triangle ABC$的三边长分别为a,b,c，

$\therefore\frac{1}{2}(a+b+c)\times 1=1$，

即$a+b+c=2$，

即$a+b=2-c$，$\therefore 0<c<2$，

$\therefore\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}=\frac{4}{2-c}+\frac{2-c}{c}=\frac{4}{2-c}+\frac{2}{c}-1$，

设$f(x)=\frac{4}{2-x}+\frac{2}{x}-1$，$0<x<2$，

$\therefore f'(x)=\frac{4}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^2+4x-4)}{x^2(x-2)^2}$，

令$f'(x)=0$，解得$x=-2+2\sqrt{2}$，

当$x\in(0,-2+2\sqrt{2})$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

当$x\in(-2+2\sqrt{2},2)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(-2+2\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}$，

故$\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$的最小值为$2+2\sqrt{2}$，故选：D.

(10)设F_1、F_2是双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点，$P$是$C$上一点，若$|PF_1|+|PF_2|=6a$，且$\triangle PF_1F_2$最小内角的大小为$30^\circ$，则双曲线$C$的渐近线方程是 (A)

(A)$\sqrt{2}x\pm y=0$ (B)$x\pm\sqrt{2}y=0$

(C)$x\pm 2y=0$ (D)$2x\pm y=0$

【解析】不妨设P为右支上一点，

由双曲线的定义，可得，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，

又$|PF_1|+|PF_2|=6a$，

解得，$|PF_1|=4a$，$|PF_2|=2a$，

且$|F_1F_2|=2c$，

由于$2a$最小，即有$\angle PF_1F_2=30^\circ$，

由余弦定理，可得，$\cos 30^\circ=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{16a^2+4c^2-4a^2}{2\times 4a\cdot 2c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则有$c^2+3a^2=2\sqrt{3}ac$，即$c=\sqrt{3}a$，

则$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}a$，

则双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

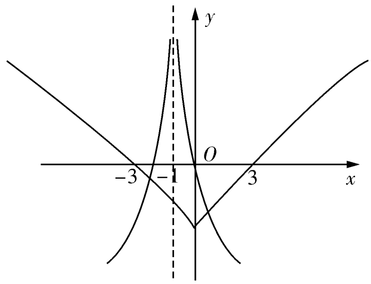
即为$y=\pm\sqrt{2}x$，故选A.

(11)定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$y=f(x)$满足$f(3)=0$，且当$x>0$时，不等式$f(x)>-xf'(x)$恒成立，则函数$g(x)=xf(x)+\lg|x+1|$的零点的个数为 (C)

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【解析】定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足：

$f(0)=0=f(3)=f(-3)$,
且 $f(-x)=-f(x)$,
又 $x>0$ 时,$f(x)>-xf'(x)$,即 $f(x)+xf'(x)>0$,
$\therefore[xf(x)]'>0$,函数 $h(x)=xf(x)$ 在 $x>0$ 时是增函数,
又 $h(-x)=-xf(-x)=xf(x)$,$\therefore h(x)=xf(x)$ 是偶函数;
$\therefore x<0$ 时,$h(x)$ 是减函数,结合函数的定义域为 $\mathbf{R}$,且
$f(0)=f(3)=f(-3)=0$,
可得函数 $y_1=xf(x)$ 与 $y_2=-\lg|x+1|$ 的大致图象如图所示,
$\therefore$ 由图象知,函数 $g(x)=xf(x)+\lg|x+1|$ 的零点的个数为 3 个.
故选:C.



(12)狄利克雷函数是高等数学中的一个典型函数,若 $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},\end{cases}$ 则称 $f(x)$ 为狄利克雷函数.对于狄利克雷函数 $f(x)$,给出下面 4 个命题:①对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f[f(x)]=1$;②对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(-x)+f(x)=0$;③对任意 $x_1\in\mathbf{R}$,都有 $x_2\in\mathbf{Q}$,$f(x_1+x_2)=f(x_1)$;④对任意 $a,b\in(-\infty,0)$,都有 $\{x|f(x)>a\}=\{x|f(x)>b\}$.其中所有真命题的序号是 (D)

(A)①④　　(B)②③　　(C)①②③　　(D)①③④

【解析】①当 $x\in\mathbf{Q}$,则 $f(x)=1$,$f(1)=1$,则 $f[f(x)]=1$,
当 $x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$,则 $f(x)=0$,$f(0)=1$,则 $f[f(x)]=1$,即对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f[f(x)]=1$,故①正确,
②当 $x\in\mathbf{Q}$,则 $-x\in\mathbf{Q}$,则 $f(-x)=1$,$f(x)=1$,此时 $f(-x)=f(x)$,
当 $x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$,则 $-x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$,则 $f(-x)=0$,$f(x)=0$,此时 $f(-x)=f(x)$,
即恒有 $f(-x)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 是偶函数,故②错误,
③当 $x_1\in\mathbf{Q}$,有 $x_2\in\mathbf{Q}$,则 $x_1+x_2\in\mathbf{Q}$,此时 $f(x_1+x_2)=f(x_1)=1$;
当 $x_1\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$,有 $x_2\in\mathbf{Q}$,则 $x_1+x_2\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$,此时 $f(x_1+x_2)=f(x_1)=0$;
综上恒有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)$ 成立,故③正确,
④$\because f(x)\geqslant 0$ 恒成立,$\therefore$ 对任意 $a,b\in(-\infty,0)$,都有 $\{x|f(x)>a\}=\{x|f(x)>b\}=\mathbf{R}$,故④正确,
故正确的命题是①③④,故选:D.

选择题答题卡

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
答案	B	D	D	D	B	D	A	B	D	A	C	D

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分.第(13)～(21)题为必考题,每个试题考生都必须作答.第(22)～(23)题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分.

(13)设 i 是虚数单位,则复数 $z=\dfrac{2i+3}{1-i}$ 的共轭复数的虚部为 $\underline{\quad -\dfrac{5}{2} \quad}$.

【解析】$\because z=\dfrac{2i+3}{1-i}=\dfrac{(2i+3)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i-2+3+3i}{2}=\dfrac{1+5i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$,$\therefore$ 复数 $z=\dfrac{2i+3}{1-i}$ 的共轭复数为 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$.则复数 $z=\dfrac{2i+3}{1-i}$ 的共轭复数的虚部为 $-\dfrac{5}{2}$.

(14)过点$(1,-2)$作圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线,切点分别为A,B,则AB所在直线的方程为$\underline{\quad y=-\frac{1}{2}\quad}$.

【解析】圆$(x-1)^2+y^2=1$的圆心为$C(1,0)$,半径为1,以$(1,-2)$、$C(1,0)$为直径的圆的方程为:$(x-1)^2+(y+1)^2=1$,将两圆的方程相减,即得公共弦AB的方程为$2y+1=0$.即$y=-\frac{1}{2}$.

(15)在矩形$ABCD$中,$AB=2$,$BC=1$,E为BC的中点,若F为该矩形内(含边界)任意一点,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最大值为$\underline{\quad \frac{9}{2}\quad}$.

【解析】设$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{AF}$的夹角为θ,由$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的几何意义可知,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$等于$|\overrightarrow{AE}|$与$\overrightarrow{AF}$在$\overrightarrow{AE}$的投影的乘积,由投影的定义可知,只有当点$F$取点$C$时,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$有最大值为$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$.

本题也可建立平面直角坐标系,把向量的数量积运算转化为向量的坐标运算,从而将问题转化为在已知可行域内求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最值问题.

(16)已知曲线$y=e^{x+a}$与$y=(x-1)^2$恰好存在两条公切线,则实数a的取值范围为$\underline{\quad(-\infty,2\ln 2-3)\quad}$.

【解析】$y=(x-1)^2$的导数$y'=2(x-1)$,$y=e^{x+a}$的导数为$y'=e^{x+a}$,设公共切线与曲线$y=e^{x+a}$相切的切点为(m,n),与$y=(x-1)^2$相切的切点为(s,t),则有公共切线斜率为$2(s-1)=e^{m+a}=\frac{t-n}{s-m}$,又$t=(s-1)^2$,$n=e^{m+a}$,即有$2(s-1)=\frac{(s-1)^2-e^{m+a}}{s-m}=\frac{(s-1)^2-2(s-1)}{s-m}$,即为$s-m=\frac{s-1}{2}-1$,即有$m=\frac{s+3}{2}(s>1)$,则有$e^{m+a}=2(s-1)$,即为$a=\ln 2(s-1)-\frac{s+3}{2}(s>1)$,令$f(s)=\ln 2(s-1)-\frac{s+3}{2}(s>1)$,则$f'(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}=\frac{3-s}{2(s-1)}$,当$s>3$时,$f'(s)<0$,$f(s)$递减,当$1<s<3$时,$f'(s)>0$,$f(s)$递增.

即有$s=3$处$f(s)$取得极大值,也为最大值,且为$2\ln 2-3$,由恰好存在两条公切线,即s有两解,可得a的范围是$a<2\ln 2-3$.

三、解答题:解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分12分)

在“新零售”模式的背景下,某大型零售公司为推广线下分店,计划在S市的A区开设分店.为了确定在该区开设分店的个数,该公司对该市已开设分店的其他区的数据作了初步处理后得到下列表格.记x表示在各区开设分店的个数,y表示这x个分店的年收入之和.

x(个)	2	3	4	5	6
y(百万元)	2.5	3	4	4.5	6

(Ⅰ)该公司已经过初步判断,可用线性回归模型拟合y与x的关系,求y关于x的线性回归方程;

(Ⅱ)假设该公司在A区获得的总年利润z(单位:百万元)与x,y之间的关系为$z=y-0.05x^2-1.4$,请结合(Ⅰ)中的线性回归方程,估算该公司应在A区开设多少个分店,才能使A区平均每个分店的年利润最大?

参考公式:

$$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a},\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

【解析】$\because\bar{x}=4,\bar{y}=4,\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{85}{100}$,

$\therefore\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=0.6$.

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程 $y=0.85x+0.6$. …………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)$z=y-0.05x^2-1.4=-0.05x^2+0.85x-0.8$,

A 区平均每个分店的年利润 $t=\frac{z}{x}=-0.05x-\frac{0.8}{x}+0.85=-0.01\left(5x+\frac{80}{x}\right)+0.85$,

$\therefore x=4$ 时,t 取得最大值,

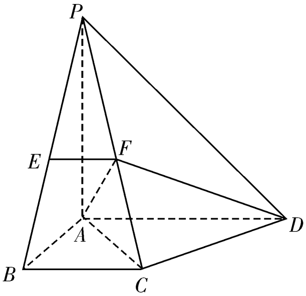
故该公司应在 A 区开设 4 个分店,才能使 A 区平均每个分店的年利润最大. ………………… 12 分

(18)(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$,且 $PA\perp AC$,$PA=AD=2$. 四边形 $ABCD$ 满足 $BC\parallel AD$,$AB\perp AD$,$AB=BC=1$. E 为侧棱 PB 的中点,F 为侧棱 PC 上的任意一点.

(Ⅰ)若 F 为 PC 的中点,求证:平面 $EFP\perp$ 平面 PAB;

(Ⅱ)是否存在点 F,使得直线 AF 与平面 PCD 垂直?若存在,写出证明过程并求出线段 PF 的长;若不存在,请说明理由.



【解析】(Ⅰ)$\because E$、F 分别为侧棱 PB、PC 的中点,$\therefore EF\parallel BC$.

$\because BC\parallel AD$,$\therefore EF\parallel AD$.

$\because$ 平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$,且 $PA\perp AC$,平面 $PAC\cap$ 平面 $ABCD=AC$,

$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$,且 $AD\subset$ 平面 $ABCD$,得 $PA\perp AD$.

又$\because AB\perp AD$,$PA\cap AB=A$,$\therefore AD\perp$ 平面 PAB,可得 $EF\perp$ 平面 PAB.

又 $EF\subset$ 平面 EFP,得平面 $EFP\perp$ 平面 PAB. …………………………………………… 6 分

(Ⅱ)存在点 F,使得直线 AF 与平面 PCD 垂直.

平面 PCA 中,过点 A 作 $AF\perp PC$,垂足为 F.

由已知 $AB\perp AD$,$BC\parallel AD$,$AB=BC=1$,$AD=2$.

根据平面几何知识,可得 $CD\perp AC$.

又$\because$ 由(Ⅰ)$PA\perp$ 平面 $ABCD$,得 $PA\perp CD$,且 $PA\cap AC=A$,

$\therefore CD\perp$ 平面 PAC,又 $AF\subset$ 平面 PAC,得 $CD\perp AF$.

又$\because CD\cap PC=C$,$\therefore AF\perp$ 平面 PCD.

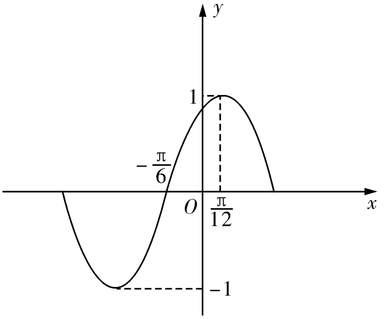
在$\triangle PAC$ 中,$PA=2$,$AC=\sqrt{2}$,$\angle PAC=90^\circ$,

$\therefore PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{6}$,$AF=\frac{PA\cdot AC}{PC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$\therefore PF=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore PC$ 上存在点 F,使得直线 AF 与平面 PCD 垂直,此时线段 PF 的长为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………… 12 分

(19)(本小题满分 12 分)

函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示,将 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后得到函数 $y=g(x)$的图象.



(Ⅰ)求函数 $y=g(x)$的解析式;

(Ⅱ)在△ABC 中,角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,$a\sin A\cos C+c\sin A\cos A=\frac{1}{3}c$,$D$ 是 AC 的中点,且 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$BD=\sqrt{26}$,求△$ABC$ 的最短边的边长.

【解析】由图知$\frac{2\pi}{\omega}=4\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)$,解得 $\omega=2$,

$\because f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$,

$\therefore 2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

由于$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,因此 $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ………………………………………………………… 4 分

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

即函数 $y=g(x)$的解析式为 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, ………………………………………… 6 分

(2)由正弦定理可知:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

则 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$,$\sin A\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos A=\frac{1}{3}\sin C$,

则 $\sin A\sin(A+C)=\frac{1}{3}\sin C$,$\therefore\sin A\sin B=\frac{1}{3}\sin C$,

由 $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,可得 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ………………………………………………… 7 分

$\because|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{26}$,$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$,$26=\frac{1}{4}(c^2+a^2+2ac\cos B)$

$\therefore 104=c^2+a^2+2ac\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………………… 9 分

$\because\sin A\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{3}\sin C$,

$\therefore a=\frac{\sqrt{5}}{3}c$,

$\therefore$解得:$a=2\sqrt{5}$,$c=6$. ………………………………………………………………… 11 分

又 $\sin A\times\frac{b}{2R}=\frac{1}{3}\times\frac{c}{2R}$，$\therefore b\sin A=\frac{1}{3}c$，$b=2\sqrt{2}$

$\therefore\triangle ABC$ 的最短边的边长为 $2\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 12 分

(20)(本小题满分 12 分)

已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=nx(n>0)$ 上在第一象限内的点 $P(2,t)$ 到焦点的距离为 $\frac{5}{2}$，曲线 C 在点 P 处的切线交 x 轴于点 Q，直线 l_1 经过点 Q 且垂直于 x 轴.

(Ⅰ)求 Q 点的坐标；

(Ⅱ)设不经过点 P 和 Q 的动直线 l_2：$x=my+b$ 交曲线 C 于点 A 和 B，交 l_1 于点 E，若直线 PA，PE，PB 的斜率依次成等差数列，试问：l_2 是否过定点？请说明理由.

【解析】(Ⅰ)由抛物线上的点 $P(2,t)$ 到焦点的距离为 $\frac{5}{2}$，得 $2+\frac{n}{4}=\frac{5}{2}$，所以 $n=2$，

则抛物线方程为 $y^2=2x$，故曲线 C 在点 P 处的切线斜率 $k=\frac{1}{2}$，切线方程为 $y-2=\frac{1}{2}(x-2)$，

令 $y=0$ 得 $x=-2$，所以点 $Q(-2,0)$.

(Ⅱ)由题意知 l_1：$x=-2$，因为 l_2 与 l_1 相交，所以 $m\neq0$.

设 l_2：$x=my+b$，令 $x=-2$，得 $y=-\frac{b+2}{m}$，故 $E(-2,-\frac{b+2}{m})$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x=my+b\\y^2=2x\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2my-2b=0$，则 $y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-2b$，直线 PA 的斜率为 $\frac{y_1-2}{x_1-2}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{2}-2}=\frac{2}{y_1+2}$，同理直线 PB 的斜率为 $\frac{2}{y_2+2}$，直线 PE 的斜率为 $\frac{2+\frac{b+2}{m}}{4}$. 因为直线 PA，PE，PB 的斜率依次成等差数列，

所以 $k_{PA}+k_{PB}=2k_{PE}$，即 $\frac{2}{y_1+2}+\frac{2}{y_2+2}=\frac{2m+2+b}{2m}$，即 $\frac{2m+4}{2m+2-b}=\frac{2m+2+b}{2m}$ 整理得：$b^2=4$，

因为 l_2 不经过点 Q，所以 $b\neq-2$. 所以 $b=2$.

故 l_2：$x=my+2$，即 l_2 恒过定点 $(2,0)$.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-x^2+ax$.

(Ⅰ)若 $f(1)=0$，求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(Ⅱ)证明当 $n\geqslant2(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>1$；

(Ⅲ)若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(2a-1)x-1$ 恒成立，求整数 a 的最小值.

【解析】(Ⅰ)因为 $f(1)=0$，所以 $a=1$ ………………………………………………………… 1 分

此时 $f(x)=\ln x-x^2+x$，$x>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}(x>0)$

由 $f'(x)<0$，得 $2x^2-x-1>0$，又 $x>0$，所以 $x>1$. 所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(1,+\infty)$. …… 3 分

(Ⅱ)令 $a=1$,由(Ⅰ)得:$f(x)$在$(1,+\infty)$递减,∴$f(x)=\ln x-x^2+x\leqslant f(1)=0$,故 $\ln x\leqslant x^2-x$,

$x>1$时,$\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x(x-1)}$,分别令 $x=2,3,4,\cdots\cdots n$,

故$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n-1)}=1-\frac{1}{n}$,

∴$n\geqslant 2$ 时,$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln n}>1$. ………………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)由 $f(x)\leqslant\left(\frac{1}{2}a-1\right)x^2+(2a-1)x-1$ 恒成立得 $\ln x-\frac{1}{2}ax^2-ax+x+1\leqslant 0$ 在上恒成立,问题

等价于 $a\geqslant\frac{\ln x+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

令 $g(x)=\frac{\ln x+x+1}{\frac{1}{2}x^2+x}$,只要 $a\geqslant g(x)_{\max}$. ………………………………………………………… 8 分

因为 $g'(x)=\frac{(x+1)\left(-\frac{1}{2}x-\ln x\right)}{\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)^2}$,令 $g'(x)=0$,得$-\frac{1}{2}x-\ln x=0$.

设 $h(x)=-\frac{1}{2}x-\ln x$,$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,不妨设$-\frac{1}{2}x-\ln x=0$ 的根为 x_0. 当 $x\in$ $(0,x_0)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$g'(x)<0$,

所以 $g(x)$在 $x\in(0,x_0)$上是增函数;在 $x\in(x_0,+\infty)$上是减函数.

所以 $g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0+1}{\frac{1}{2}x_0^2+x_0}=\frac{1+\frac{1}{2}x_0}{x_0\left(1+\frac{1}{2}x_0\right)}=\frac{1}{x_0}$. ………………………………… 10 分

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2-\frac{1}{4}>0$,$h(1)=-\frac{1}{2}<0$,

所以$\frac{1}{2}<x_0<1$,此时 $1<\frac{1}{x_0}<2$,即 $g(x)_{\max}\in(1,2)$.

所以整数 a 的最小值为 2. ……………………………………………………………………………… 12 分

请考生在第(22)～(23)两题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分。做答时请写清题号。

(22)(本小题满分 10 分)选修 4—4:极坐标与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,已知曲线 C_1:$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),曲线 C_2:$\sqrt{2}\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=6$.

(Ⅰ)求曲线 C_1 和直线 C_2 的普通方程;

(Ⅱ)在曲线 C_1 上求一点 P,使点 P 到直线 l 的距离为$\frac{5\sqrt{2}}{2}$,求出 P 点的坐标.

【解析】(Ⅰ)C_1 的普通方程$\frac{x^2}{3}+y^2=1$;C_2 的普通方程为 $y=x-6$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)设点 $P(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha)$,则点 P 到曲线 C_2 的距离为

$d=\dfrac{|\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha-6|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left|2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-6\right|}{\sqrt{2}}$, ………………………………………………………………………… 7 分

当 $d=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ 时，$\left|2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-6\right|=5$，即 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$，此时，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{3}{2}\pi$，

所以 P 点的坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 或 $(0,-1)$. ………………………………………………………………… 10 分

(23)(本小题满分 10 分)选修 4—5:不等式选讲

已知不等式 $|x|+|x-3|<x+6$ 的解集为 (m,n).

(Ⅰ)求 m,n 的值；

(Ⅱ)若 $x>0,y>0,nx+y+m=0$，求证：$x+y\geqslant 16xy$.

【解析】(Ⅰ)由 $|x|+|x-3|<x+6$，

得 $\begin{cases}x\geqslant 3\\x+x-3<x+6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<3\\3<x+6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\-x+3-x<x+6\end{cases}$，

解得 $-1<x<9$，$\therefore m=-1,n=9$，……………………………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $x>0,y>0,9x+y=1$，

$\therefore\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(9x+y)=10+\dfrac{y}{x}+\dfrac{9x}{y}\geqslant 10+2\sqrt{\dfrac{y}{x}\times\dfrac{9x}{y}}=16$，

当且仅当 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{9x}{y}$ 即 $x=\dfrac{1}{12},y=\dfrac{1}{4}$ 时取等号，

$\therefore\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqslant 16$，即 $x+y\geqslant 16xy$. ………………………………………………………………… 10 分