炎德·英才大联考湖南师大附中2018届高三月考试卷(五)

数　学(理科)

命题人:徐凡训　黄祖军　审题人:周正安

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共10页。时量120分钟。满分150分。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)复数$\frac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的虚部是　(C)

(A) i　(B) $-$i　(C) 1　(D) -1

【解析】$\frac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{5\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=2+\mathrm{i}$,则复数$\frac{5\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的虚部是1,故选C.

(2)若集合$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-4|\leqslant 2\}$,非空集合$B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,2a\leqslant x\leqslant a+3\}$,若$B\subseteq A$,则实数$a$的取值范围是　(D)

(A) $(3,+\infty)$　(B) $[-1,+\infty)$　(C) $(1,3)$　(D) $[1,3]$

【解析】∵集合$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-4|\leqslant 2\}=[2,6]$,

由集合B不为空集可得$2a\leqslant a+3$,即$a\leqslant 3$,由$B\subseteq A$得$\begin{cases}2a\geqslant 2,\\a+3\leqslant 6,\end{cases}$解得$a\in[1,3]$,故选D.

(3)若$q>0$,命题甲:“a,b为实数,且$|a-b|<2q$”;命题乙:“a,b为实数,满足$|a-2|<q$,且$|b-2|<q$”,则甲是乙的　(B)

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

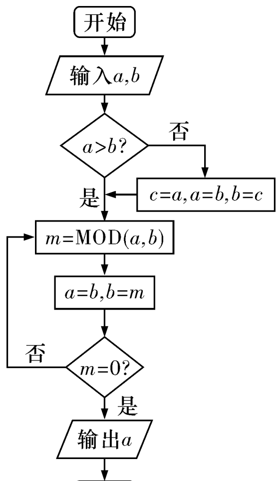
【解析】若a,b为实数,且$|a-b|<2q$,则取$a=8,b=6,q=2$时,不满足$|a-2|<q$,且$|b-2|<q$;

若a,b为实数,满足$|a-2|<q$,且$|b-2|<q$,

则$|a-b|=|(a-2)-(b-2)|\leqslant|a-2|+|b-2|<q+q=2q$,

所以甲是乙的必要而不充分条件,故选B.

(4)MOD(a,b)表示求a除以b的余数,若输入$a=34,b=85$,则输出的结果为　(B)



(A) 0

(B) 17

(C) 21

(D) 34

【解析】模拟执行程序框图,可得$a=34,b=85$,

不满足条件$a>b$,$c=34,a=85,b=34$,

$m=\mathrm{MOD}(85,34)=17,a=34,b=17$,

不满足条件$m=0$,$m=\mathrm{MOD}(34,17)=0,a=17,b=0$,

满足条件$m=0$,退出循环,输出a的值为17.故选B.

(5)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$e_1$,双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$e_2$,抛物线$y^2=2px$的离心率为$e_3$,$a=5^{\log_3 e_1}$,$b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} e_2}$,$c=5^{\log_{\frac{1}{2}} e_3}$,则$a,b,c$

之间的大小关系是 (D)

(A) $a>c>b$　　(B) $a>b>c$

(C) $c>b>a$　　(D) $b>c>a$

【解析】依题意，$0<e_1<1, e_2>1, e_3=1$，$\therefore \log_3 e_1<0, \log_2 e_2>0, \log_{\frac{1}{2}} e_3=0$，

$\therefore c=5^{\log_{\frac{1}{2}} e_3}=5^0=1$；又 $b=\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} e_2}=5^{\log_2 e_2}>5^0=1$；$a=5^{\log_3 e_1}<5^0=1$；

$\therefore b>c>a$. 故选 D.

(6)若 $a\in[1,6]$，则函数 $y=\frac{x^2+a}{x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 内单调递增的概率是 (B)

(A) $\frac{4}{5}$　　(B) $\frac{3}{5}$　　(C) $\frac{2}{5}$　　(D) $\frac{1}{5}$

【解析】$\because$ 函数 $y=\frac{x^2+a}{x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 内单调递增，$\therefore y'=1-\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $[2,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore a\leqslant x^2$ 在 $[2,+\infty)$ 恒成立，$\therefore a\leqslant 4$，

$\because a\in[1,6]$，$\therefore a\in[1,4]$，

$\therefore$ 函数 $y=\frac{x^2+a}{x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 内单调递增的概率是 $\frac{4-1}{6-1}=\frac{3}{5}$，故选 B.

(7)下列选项中为函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2x-\frac{1}{4}$ 的一个对称中心为 (A)

(A) $\left(\frac{7\pi}{24},0\right)$　　(B) $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$

(C) $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{1}{4}\right)$　　(D) $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$

【解析】函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2x-\frac{1}{4}=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]\sin 2x-\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\cos 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $4x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，求得 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24}$，可得函数的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{24},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=1$ 时，函数的对称中心为 $\left(\frac{7\pi}{24},0\right)$. 故选 A.

(8)九章算术中一文：蒲第一天长 3 尺，以后逐日减半；莞第一天长 1 尺，以后逐日增加一倍，则______天后，蒲、莞长度相等？参考数据：$\lg 2=0.3010$，$\lg 3=0.4771$，结果精确到 0.1.（注：蒲每天长高前一天的一半，莞每天长高前一天的 2 倍.） (B)

(A) 2.8　　(B) 2.6　　(C) 2.4　　(D) 2.2

【解析】设蒲的长度组成等比数列 $\{a_n\}$，其 $a_1=3$，公比为 $\frac{1}{2}$，其前 n 项和为 A_n.

莞的长度组成等比数列 $\{b_n\}$，其 $b_1=1$，公比为 2，其前 n 项和为 B_n.

则 $A_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$，$B_n=\frac{2^n-1}{2-1}$，

由题意可得：$\frac{3\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^n-1}{2-1}$，化为：$2^n+\frac{6}{2^n}=7$，解得 $2^n=6$，$2^n=1$（舍去）.

$\therefore n=\frac{\lg 6}{\lg 2}=1+\frac{\lg 3}{\lg 2}\approx 2.6$.

$\therefore$ 估计 2.6 天后，蒲、莞长度相等，故选 B.

(9)某学校有 2 500 名学生，其中高一 1 000 人，高二 900 人，高三 600 人，为了了解学生的身体健康状况，采用分层抽样的方法从本校学生中抽取 100 人，从高一和高三抽取样本数分别为 a，b. 若直线 $ax+by+8=0$ 与以 $A(1,-1)$ 为圆心的圆交于 B，C 两点，且 $\angle BAC=120°$，则圆 C 的方程为 (C)

(A) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$　　(B) $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

(C) $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{18}{17}$　　(D) $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{12}{15}$

【解析】由题意，$\dfrac{100}{2\ 500}=\dfrac{a}{1\ 000}=\dfrac{b}{600}$，∴$a=40$，$b=24$，

∴直线 $ax+by+8=0$，即 $5x+3y+1=0$，

$A(1,-1)$到直线的距离为$\dfrac{|5-3+1|}{\sqrt{25+9}}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

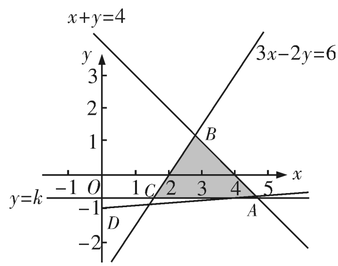
∵直线 $ax+by+8=0$ 与以 $A(1,-1)$ 为圆心的圆交于 B，C 两点，且$\angle BAC=120°$，

∴$r=\dfrac{6}{\sqrt{34}}$，∴圆 C 的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{18}{17}$，故选 C.

(10)已知 $k\geqslant -1$，实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+y\leqslant 4,\\3x-2y\geqslant 6,\\y\geqslant k,\end{cases}$且$\dfrac{y+1}{x}$的最小值为 k，则 k 的值为 (C)

(A) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{5}$　　(B) $\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{5}$　　(C) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　　(D) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

【解析】作出不等式组对应的平面区域如图：



$\dfrac{y+1}{x}$的几何意义是区域内的点到定点 $D(0,-1)$ 的斜率，

由图象知 AD 的斜率最小，由$\begin{cases}y=k,\\x+y=4\end{cases}$得$\begin{cases}x=4-k,\\y=k,\end{cases}$得 $A(4-k,k)$，

则 AD 的斜率 $k=\dfrac{k+1}{4-k}$，整理得 $k^2-3k+1=0$，得 $k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$或$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$(舍)，

故选 C.

(11)某班上午有五节课，分别安排语文，数学，英语，物理，化学各一节课. 要求语文与化学相邻，数学与物理不相邻，且数学课不排第一节，则不同排课法的种数是 (A)

(A) 16　　(B) 24　　(C) 8　　(D) 12

【解析】根据题意，分 3 步进行分析：

①要求语文与化学相邻，将语文与化学看成一个整体，考虑其顺序，有 $A_2^2=2$ 种情况；

②将这个整体与英语全排列，有 $A_2^2=2$ 种顺序，排好后，有 3 个空位；

③数学课不排第一节，有 2 个空位可选，在剩下的 2 个空位中任选 1 个，安排物理，有 2 种情况，

则数学、物理的安排方法有 $2\times 2=4$ 种.

则不同排课法的种数是 $2\times 2\times 4=16$ 种，故选 A.

(12)定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$满足 $f(2-x)=f(x)$，且当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=\ln x-x+1$，若函数 $g(x)=f(x)+mx$ 有 7 个零点，则实数 m 的取值范围为 (A)

(A) $\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{\ln 2-1}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{1-\ln 2}{6}\right)$

(B) $\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{\ln 2-1}{8}\right)$

(C) $\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{1-\ln 2}{6}\right)$

(D) $\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{1-\ln 2}{8}\right)$

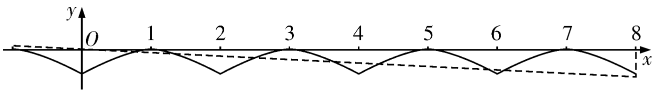
【解析】函数 $g(x)=f(x)+mx$ 有 7 个零点，即函数 $y=f(x)$的图象与 $y=-mx$ 的图象有 7 个交点.

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=\ln x-x+1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}<0$，

此时 $f(x)$ 单调递减，且 $f(1)=0$，$f(2)=\ln 2-1$. 由 $f(2-x)=f(x)$ 知函数图象关于 $x=1$ 对称，

而 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)=f[-(2-x)]=f(x-2)$，故 $f(x+2)=f(x)$，

即 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，易知 $m\neq0$，当 $-m<0$ 时，作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=-mx$ 的图象，如图所示.



则要使函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=-mx$ 的图象有 7 个交点，需有 $\begin{cases}-8m<f(8),\\-6m>f(6),\end{cases}$

即 $\begin{cases}-8m<\ln 2-1,\\-6m>\ln 2-1,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1-\ln 2}{8}<m<\dfrac{1-\ln 2}{6}$.

同理，当 $-m>0$ 时，可得 $\dfrac{\ln 2-1}{6}<m<\dfrac{\ln 2-1}{8}$.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{\ln 2-1}{8}\right)\cup\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{1-\ln 2}{6}\right)$.

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第(13)～(21)题为必考题，每个试题考生都必须作答。第(22)～(23)题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题，本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

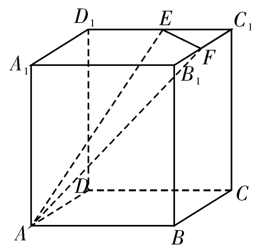
(13)若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有两个零点 x_1、x_2，则 $f(x)=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$，类比此，若三次函数 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 有三个零点 x_1、x_2、x_3，则 $g(x)=$ $\underline{\quad a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\quad}$.

(14)若 $(\cos\varphi+x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为 4，则 $\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{5}\quad}$.

【解析】由二项式定理得，x^3 的系数为 $C_5^3\cos^2\varphi=4$，

$\therefore\cos^2\varphi=\dfrac{2}{5}$，故 $\sin\left(2\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\varphi=1-2\cos^2\varphi=\dfrac{1}{5}$.

(15)如图所示，在棱长为 6 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别是棱 C_1D_1，B_1C_1 的中点，过 A，E，F 三点作该正方体的截面，则截面的周长为 $\underline{\quad 6\sqrt{13}+3\sqrt{2}\quad}$.

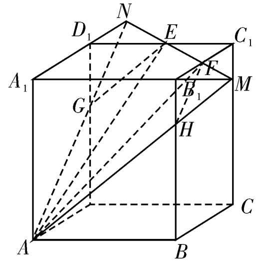


【解析】如图，

延长 EF、A_1B_1 相交于 M，连接 AM 交 BB_1 于 H，

延长 FE、A_1D_1 相交于 N，连接 AN 交 DD_1 于 G，

可得截面五边形 $AHFEG$.



$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是边长为 6 的正方体，且 E，F 分别是棱 C_1D_1，B_1C_1 的中点，

$\therefore EF=3\sqrt{2}$，$AG=AH=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，$EG=FH=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

$\therefore$ 截面的周长为 $6\sqrt{13}+3\sqrt{2}$.

(16)已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $|\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $|t\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|+\left|t\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}\right|(t\in\mathbf{R})$ 的最小值是 $\underline{\quad\dfrac{\sqrt{7}}{2}\quad}$.

【解析】向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $|\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，

两边平方整理可得 $x^2\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\geqslant0$，

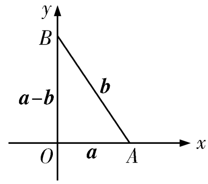
则 $\Delta=4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+4\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\leqslant 0$，即有 $(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leqslant 0$，即 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，

则 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，

由 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，即有 $|\boldsymbol{a}|=1$，

则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{3}$，

画出 $\overrightarrow{AO}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，建立平面直角坐标系，如图所示.



则 $A(1,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$\therefore\boldsymbol{a}=(-1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$.

$\therefore|t\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|+\left|t\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}}{2}\right|=\sqrt{(1-t)^2+(\sqrt{3}t)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+(\sqrt{3}t)^2}=\sqrt{4t^2-2t+1}+\sqrt{4t^2-t+\frac{1}{4}}=2\left[\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\left(0+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2}\right]$

表示 $P(t,0)$ 与 $M\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$N\left(\frac{1}{8},-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ 的距离之和的 2 倍，

当 M,P,N 共线时，取得最小值 $2|MN|$.

即有 $2|MN|=2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分 12 分)

某城市随机抽取一年(365 天)内 100 天的空气质量指数 API(Air Pollution Index)的监测数据，结果统计如下：

API	[0,50]	(50,100]	(100,150]	(150,200]	(200,250]	(250,300]	大于 300
空气质量	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染
天数	10	15	20	30	7	6	12

(Ⅰ)若本次抽取的样本数据有 30 天是在供暖季，其中有 7 天为重度污染，完成下面 2×2 列联表，并判断能否有 95%的把握认为该市本年空气重度污染与供暖有关？

	非重度污染	重度污染	合计
供暖季			
非供暖季			
合计			100

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

(Ⅱ)政府要治理污染，决定对某些企业生产进行管控，当 API 在区间[0,100]时企业正常生产；当 API 在区间(100,200]时对企业限产 30%(即关闭 30%的产能)，当 API 在区间(200,300]时对企业限产 50%，当 API 在 300 以上时对企业限产 80%，企业甲是被管控的企业之一，若企业甲正常生产一天可得利润 2 万元，若以频率当概率，不考虑其他因素：

①在这一年中随意抽取 5 天，求 5 天中企业被限产达到或超过 50%的恰为 2 天的概率；

②求企业甲这一年因限产减少的利润的期望值.

【解析】（Ⅰ）根据以上数据得到如下列联表：

	非重度污染	重度污染	合计
供暖季	23	7	30
非供暖季	65	5	70
合计	88	12	100

$K^2=\dfrac{100\times(65\times7-23\times5)^2}{88\times12\times70\times30}\approx5.213>3.841$，

所以有 95%的把握认为空气重度污染与供暖有关. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）①设"在本年内随机抽取一天，该天企业被限产达到或超过 50%"为事件 A，

据题意有频数为 25，$P(A)=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$，……………………………………（6 分）

则这一年中随意抽取 5 天，5 天中被限产达到或超过 50%的恰为 2 天的概率 P 是：

$P=C_5^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{135}{512}$. …………………………………… 8 分

②企业甲这一年的利润的期望值为

$365\times\left(2\times\dfrac{25}{100}+2\times\dfrac{7}{10}\times\dfrac{50}{100}+2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{13}{100}+2\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{12}{100}\right)=502.97$ 万元，

故企业甲这一年因限产减少的利润的期望值是 $365\times2-502.97=227.03$ 万元. ……………（12 分）

（18）（本小题满分 12 分）

已知锐角△ABC 的三个内角 A、B、C 满足 $\sin B\sin C=(\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A)\tan A$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）若△ABC 的外接圆的圆心是 O，半径是 1，求$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$的取值范围.

【解析】（Ⅰ）由已知有：$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{2}$，即 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，

又 A 是锐角，∴$A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})&=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}^2\\&=\cos\angle AOB+\cos\angle AOC-2\\&=\cos 2C+\cos 2B-2\\&=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2B\right)+\cos 2B-2\\&=\frac{3}{2}\cos 2B-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B-2\\&=\sqrt{3}\cos\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)-2,\end{aligned}$$
……………………………………（9 分）

∵△ABC 是锐角三角形，∴$\begin{cases}B<\dfrac{\pi}{2},\\ B+A>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\pi}{3}<B<\dfrac{\pi}{2}$，则$\dfrac{5\pi}{6}<2B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

故$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$的取值范围是$\left[-2-\sqrt{3},-\dfrac{7}{2}\right)$. ……………………（12 分）

另法：设 M 是边 BC 的中点，$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}$，

又$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}$，

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{AM}^2-1$，

据正弦定理得 $BC=2\sin A=1$，则 $|\overrightarrow{OM}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because\triangle ABC$ 是锐角三角形，当 B 或 C 取临界值 $\frac{\pi}{2}$ 时 $|\overrightarrow{AM}|$ 最小值是 $\frac{\sqrt{13}}{2}$，

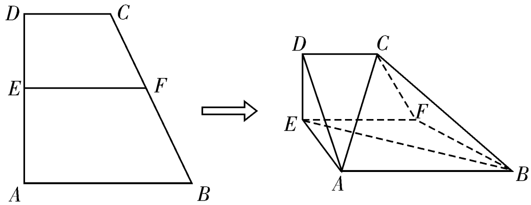
当 $AM\perp BC$ 时 $|\overrightarrow{AM}|$ 最大值是 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $|\overrightarrow{AM}|\in\left(\frac{\sqrt{13}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}-\overrightarrow{AM}^2\in\left[-2-\sqrt{3},-\frac{7}{2}\right)$.

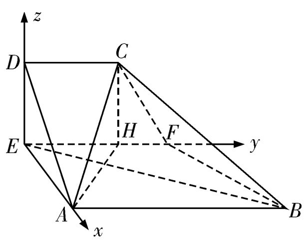
(19)(本小题满分 12 分)

已知直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB\perp AD$，$AB=AD=2CD=2$，E、F 分别是边 AD、BC 上的点，且 $EF//AB$，沿 EF 将 $EFCD$ 折起并连接成如图的多面体 $CD-ABFE$，折后 $BE\perp ED$，



（Ⅰ）求证：$AE\perp FC$；

（Ⅱ）若折后直线 AC 与平面 $ABFE$ 所成角 θ 的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求证：平面 $ABCD\perp$ 平面 FCB.



【解析】（Ⅰ）$\because EF//AB$，$AB\perp AD$，

$\therefore EF\perp AD$，$EF\perp DE$，

又 $BE\perp DE$，$EF\cap BE=E$，

$\therefore DE\perp$ 平面 $ABFE$，$DE\perp AE$，

又 $EF\perp AE$，$DE\cap EF=E$，

$\therefore AE\perp$ 平面 $EFCD$，$AE\perp CF$. ……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，可如图建立空间直角坐标系，

作 $CH\perp EF$ 于 H，连 AH，由（Ⅰ）知 $CH\perp ABFE$，

即 $\angle CAH$ 为 AC 与平面 $ABFE$ 所成角，设 $DE=CH=h$，$AH^2=1+(2-h)^2=h^2-4h+5$，

而直线 AC 与平面 $ABFE$ 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{h}{\sqrt{2h^2-4h+5}}\Rightarrow h=1$.

（或：平面 $ABFE$ 的法向量是 $(0,0,1)$，$C(0,1,h)$，$A(2-h,0,0)$，$\overrightarrow{AC}=(h-2,1,h)$，

则 $\sin\theta=\left|\frac{h}{1\cdot\sqrt{(h-2)^2+1+h^2}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow h=1$ ）. ……………………………………………………（8 分）

易知平面 $ABCD\perp$ 平面 ADE 于 AD，取 AD 的中点 M，则 $EM\perp$ 平面 $ABCD$，

而 $ED=EA=1$，则平面 $ABCD$ 的法向量是 $\overrightarrow{EM}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，

（或另法求出平面 $ABCD$ 的法向量是 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$ ），

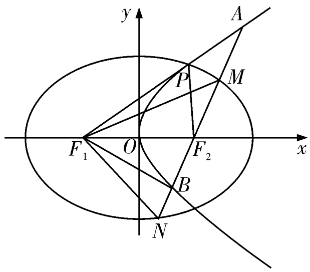
再求出平面 FCB 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(-1,2,1)$（过程略），

设二面角 $A-BC-F$ 是 α，则 $|\cos\alpha|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|-1+0+1|}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=0$，

$\therefore$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 FCB. ……………………………………………………（12 分）

(20)(本小题满分 12 分)

如图,已知曲线 $C_1: y^2=4x$,曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点是 F_1, F_2,且 F_2 就是 C_1 的焦点,点 P 是 C_1 与 C_2 的在第一象限内的公共点且 $|PF_2|=\frac{5}{3}$,过 F_2 的直线 l 分别与曲线 C_1、C_2 交于点 A, B 和 M, N.



(Ⅰ) 求点 P 的坐标及 C_2 的方程;

(Ⅱ)若$\triangle F_1AB$ 与$\triangle F_1MN$ 面积分别是 S_1、S_2,求$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围.

【解析】(Ⅰ)$F_2(1,0)$,设 $P(x_0, y_0)$,据题意有 $|PF_2|=x_0+1=\frac{5}{3}$,

则 $x_0=\frac{2}{3}$,$P\left(\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, ………………………………………………………………………(2 分)

点 P 在椭圆上及 F_2 就是 C_1 的焦点,则$\begin{cases}a^2-b^2=1,\\ \frac{4}{9a^2}+\frac{24}{9b^2}=1,\end{cases}$解之得:$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$

所以 C_2 的方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………(4 分)

或由 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 计算出 $a=2$,从而得方程.

(Ⅱ)易知$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AB|}{|MN|}$,当 l 不垂直于 x 轴时,设 l 的方程是 $y=k(x-1)\ (k\neq 0)$,

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x\end{cases}$得:$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,$\Delta_1=(2k^2+4)^2-4k^4>0$,

设 $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$,$|AB|=x_1+x_2+2=\frac{4(k^2+1)}{k^2}$; ……………………(7 分)

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$得:$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

$\Delta_2=64k^4-4(3+4k^2)(4k^2-12)=144(1+k^2)>0$,

设 $M(x_3, y_3)$,$N(x_4, y_4)$,

则 $x_3+x_4=\frac{8k^2}{3+4k^2}$,$x_3x_4=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$,

$|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_3+x_4)^2-4x_3x_4]}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$,

$\left(\text{或} |MN|=2a-e(x_3+x_4)=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}\right)$ ………………………………………………………………(10 分)

则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AB|}{|MN|}=\frac{3+4k^2}{3k^2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{k^2}\in\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$,

当 l 垂直于 x 轴时,易知 $|AB|=4$,$|MN|=\frac{2b^2}{a}=3$,此时$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AB|}{|MN|}=\frac{4}{3}$,

综上有$\frac{S_1}{S_2}$的取值范围是$\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$. ……………………………………………………………(12 分)

设 $l: x=my+1$ 类似给分

(21)(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=ax^2+x-x\ln x$，$g(x)=e^x-x^2$（e为自然对数的底数）.

(Ⅰ)当 $x\in[0,+\infty)$ 时，求 $g(x)$ 的最小值；

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 恰有两个不同极值点 x_1,x_2.

①求 a 的取值范围；

②求证：$x_1x_2\geqslant e^2$.

【解析】(Ⅰ) $g'(x)=e^x-2x$，$(g'(x))'=e^x-2$，$x\in[0,+\infty)$，

所以 $g'(x)$ 在 $[0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(x)_{\min}=g'(\ln 2)=2(1-\ln 2)>0$，…………（2分）

即 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $g'(x)=e^x-2x>0$，

故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=g(0)=1$. …………（4分）

(Ⅱ) $f'(x)=2ax-\ln x$，要 $f(x)$ 恰有两个极值点，

等价于 $h(x)=2ax-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个不同零点.

$h'(x)=2a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax-1}{x}$， …………（5分）

当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不合要求；…………（6分）

当 $a>0$ 时，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，

而 $h\left(\dfrac{1}{2a}\right)=1+\ln(2a)$，由 $h\left(\dfrac{1}{2a}\right)=1+\ln(2a)<0\Rightarrow 0<a<\dfrac{1}{2e}$， …………（7分）

$\therefore \dfrac{1}{2a}>e$，$e^{\frac{1}{2a}}>\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2>\dfrac{1}{2a}$，

此时 $h(1)=2a>0$，$h\left(e^{\frac{1}{2a}}\right)=2ae^{\frac{1}{2a}}-\dfrac{1}{2a}=2a\left[e^{\frac{1}{2a}}-\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2\right]>0$，

故当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，$g(x)=2ax-\ln x$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上各恰有一个零点，

即当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时函数 $f(x)$ 有两个极值点. …………（8分）

另法：考查 $2a=\dfrac{\ln x}{x}$

②不妨设 $0<x_1<x_2$，则有：$\begin{cases}\ln x_1=2ax_1,\\ \ln x_2=2ax_2,\end{cases}$两式相加与相减得：$\begin{cases}\ln(x_1x_2)=2a(x_1+x_2),\\ \ln\dfrac{x_1}{x_2}=2a(x_1-x_2),\end{cases}$

$\Leftrightarrow \ln(x_1x_2)=\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，而 $x_1x_2>e^2\Leftrightarrow\ln(x_1x_2)>2$，

$\Leftrightarrow\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\ln\dfrac{x_1}{x_2}>2$，令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，

$\Leftrightarrow\dfrac{t+1}{t-1}\ln t>2\Leftrightarrow(t+1)\ln t-2(t-1)<0$，$t\in(0,1)$ $\Leftrightarrow\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}<0$，$t\in(0,1)$，

考查函数 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$t\in(0,1)$，$g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ 恒成立于 $(0,1)$，

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则恒有 $g(t)<g(1)=0$.

即 $\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}<0$，$t\in(0,1)$ 成立，

故命题得证. …………（12分）

请考生在第(22)、(23)两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

(22)(本小题满分10分)选修4－4：坐标系与参数方程

在极坐标系中曲线 C_1 的方程是 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=16$，点 P 是 C_1 上的动点，点 M 满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$（$O$ 为极点），点 M 的轨迹为曲线 C_2，以极点 O 为原点，极轴为 x 轴的非负半轴建立平面直角坐标系 xOy，已

知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

（Ⅰ）求曲线 C_2 直角坐标方程与直线 l 的普通方程；

（Ⅱ）求点 M 到直线 l 的距离的最大值.

【解析】（Ⅰ）设在极坐标系中 $M(\rho,\theta)$，据 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$ 有 $P(2\rho,\theta)$，

代入 C_1 的方程 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=16$ 整理得：$\rho^2(1+3\sin^2\theta)=4$，

再化为直角坐标方程是：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 即为所求. ……………………………………（4 分）

直线 l 的参数方程 $\begin{cases} x=3+t, \\ y=2t \end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程是 $2x-y-6=0$. ……………（5 分）

（Ⅱ）由 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 知，在直角坐标系中设 $M(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\alpha\in\mathbf{R}$，

点 M 到直线 l 的的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha-\sin\alpha-6|}{\sqrt{5}}=\frac{|\sqrt{17}\cos(\alpha+\varphi)-6|}{\sqrt{5}}$，

$\therefore d_{\max}=\frac{\sqrt{17}+6}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{85}+6\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………（10 分）

(23)（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

（Ⅰ）已知函数 $f(x)=|x-2|-|x+1|$. 解不等式 $f(x)\geqslant x^2-2x$；

（Ⅱ）已知 x,y,z 均为正数. 求证：$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

【解析】（Ⅰ）函数 $f(x)=|x-2|-|x+1|=\begin{cases} 3(x\leqslant-1), \\ -2x+1,(-1<x<2), \\ -3(x>2), \end{cases}$ ……………………（2 分）

当 $x\leqslant-1$ 时，不等式为 $x^2-2x\leqslant3$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant3$，即 $x=-1$；

当 $-1<x<2$ 时，不等式为 $x^2-2x\leqslant-2x+1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant1$，即 $-1<x\leqslant1$；

当 $x\geqslant2$ 时，不等式为 $x^2-2x\leqslant-3$，$\therefore x\in\varnothing$.

综合上述，不等式的解集为：$[-1,1]$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）证明：因为 x,y,z 都是为正数，

所以 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}=\frac{1}{z}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant\frac{2}{z}$ ①

同理可得 $\frac{y}{xz}+\frac{z}{yx}\geqslant\frac{2}{x}$ ②

$\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\geqslant\frac{2}{y}$ ③ ……………………………………（8 分）

当且仅当 $x=y=z$ 时，以上三式等号都成立.

将上述三个不等式两边分别相加，并除以 2，

得：$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. ……………………………………（10 分）

或直接用柯西不等式证明：

$$\left[\left(\sqrt{\frac{x}{yz}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y}{zx}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{z}{xy}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\frac{z}{xy}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{yz}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{y}{zx}}\right)^2\right]\geqslant\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)^2,$$

即 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

或要证 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 即证 $x^2+y^2+z^2\geqslant yz+xz+xy$，再证 $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geqslant0$ 显然成立.