

## 2017-2018 学年度上期富顺二中高二年级 12 月考试

## 数 学 试 题(理)

本试卷分试题卷和答题卷两部分。试题卷包括 1 至 4 页；答题卷 1 至 4 页。满分 150 分。考试时间 120 分钟。预计难度系数：0.57。

命题：高二数学备课组 校对：郑红斌、郭莉莉 审核：郑声从

【注意事项】1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在机读卡上。考试结束后，将机读卡 and 答题卷交回。

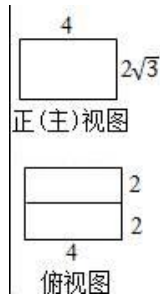
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

3. 第 I 卷共 12 小题，每题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

## 第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分。在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的）

- 下列各数转化成十进制数后最小的数是（ ）。  
A.  $111111_{(2)}$     B.  $210_{(6)}$     C.  $1000_{(4)}$     D.  $81_{(9)}$
- 以下命题正确的是（ ）。  
A. 经过空间中的三点，有且只有一个平面  
B. 空间中，如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等  
C. 空间中，两条异面直线所成角的范围是  $(0, \frac{\pi}{2}]$   
D. 如果直线  $l$  平行于平面  $\alpha$  内的无数条直线，则直线  $l$  平行于平面  $\alpha$
- 向量  $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, 3)$ . 若  $k\vec{a} - \vec{b}$  与  $\vec{b}$  垂直，则实数  $k =$ （ ）。  
A. 7    B. -7    C. 6    D. -6
- 已知  $a, b, c$  是三条不重合的直线， $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面，直线  $l // \alpha$ ，则（ ）。  
A.  $a // c, b // c \Rightarrow a // b$     B.  $a // \beta, b // \beta \Rightarrow a // b$   
C.  $a // c, c // \alpha \Rightarrow a // \alpha$     D.  $a // l \Rightarrow a // \alpha$
- 某几何体的三视图如图，则这个几何体的表面积为（ ）。  
A.  $24 + 4\sqrt{3}$     B.  $48 + 8\sqrt{3}$     C.  $24 + 8\sqrt{3}$     D.  $48 + 4\sqrt{3}$



6. 上图是某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛得分统计的茎叶图，则甲、乙两人这几场比赛得分的中位数之和是 ( )

- A. 62      B. 63      C. 64      D. 65

7. 防疫站对学生进行健康调查，某中学共有学生 1600 名，采用分层抽样法抽取容量为 200 的样本. 已知女生比男生少抽了 10 人，则该校的女生人数是 ( ).

- A. 650      B. 760      C. 800      D. 500

8. 已知  $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha, 1)$  和  $Q(2\cos\beta, 2\sin\beta, 1)$ ，则  $|\overrightarrow{PQ}|$  的取值范围是 ( )

- A. (1, 25)    B. [1, 25]    C. [1, 5]    D. (1, 5)

9. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = 2$ ， $BC = 2$ ， $DD_1 = 3$ ，则  $AC$  与  $BD_1$  所成角的余弦值为 ( )

- A. 0      B.  $\frac{3\sqrt{70}}{70}$       C.  $-\frac{3\sqrt{70}}{70}$       D.  $\frac{\sqrt{70}}{70}$

10. 已知矩形  $ABCD$  的顶点都在半径为 5 的球  $P$  的球面上，且  $AB=4$ ， $BC=3$ ，则棱锥  $P - ABCD$  的体积为 ( )

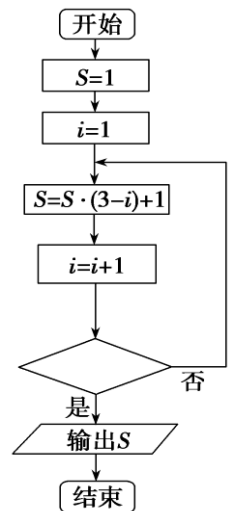
- A.  $5\sqrt{3}$     B.  $30\sqrt{3}$     C.  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$     D.  $10\sqrt{3}$

11. 如图所示程序框图，运行相应的程序，若输出  $S$  的值为 1，则判断框内为 ( )

- A.  $i > 6?$     B.  $i > 5?$     C.  $i \geq 3?$     D.  $i \geq 4?$

12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，圆  $M$  的方程为  $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$ ，若直线  $kx - y + 3 = 0$  上至少存在一点，使得以该点为圆心，半径为 1 的圆与圆  $M$  有公共点，则  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, \frac{4}{3}]$     B.  $[0, +\infty)$   
 C.  $[-\frac{4}{3}, 0]$     D.  $(-\infty, \frac{4}{3}] \cup [0, +\infty)$

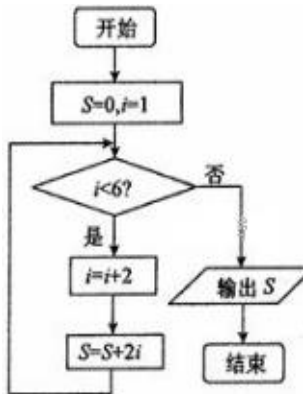


## 第 II 卷 (非选择题, 共 90 分)

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，把答案填在答题卡上）

13. 平面直角坐标系中，直线  $3x - y + 2 = 0$  关于点  $(1, 1)$  对称的直线方程是\_\_\_\_\_.

14. 执行如图所示的程序框图，则输出  $S$  的结果为\_\_\_\_\_.



15. 若  $1, 2, 3, 4, m$  这五个数的平均数为 3，则这五个数的方差为\_\_\_\_\_.

16. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，已知  $AA_1 = 9, BC = 6\sqrt{3}$ ， $N$  为  $BC$  的中点，则直线  $D_1C_1$  与平面  $A_1B_1N$  的距离是\_\_\_\_\_.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤，解答写在答题卷上.

17. （本题 10 分）甲、乙两台机床同时加工直径为  $100\text{mm}$  的零件，为了检验产品的质量，从产品中各随机抽出 6 件进行测量，测得数据如下表：

甲机床	99	100	98	100	100	103
乙机床	99	100	102	99	100	100

(1) 分别计算两组数据的平均数与方差；

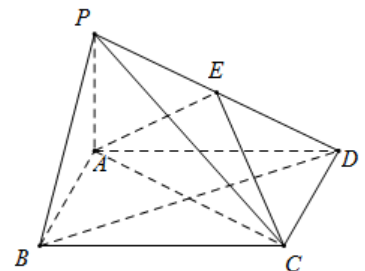
(2) 根据 (1) 的计算结果，你能知道哪一台机床加工这种零件更符合 requirements 吗？

18. （本题 12 分）如图，四棱锥  $P - ABCD$  中，底面  $ABCD$  为矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $E$  为  $PD$  的中点。

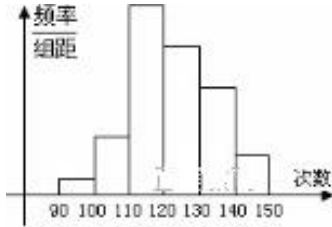
(1) 证明： $PB \parallel$  平面  $AEC$ ；

(2) 设  $AP = 1, AD = \sqrt{3}$ ，三棱锥  $P - ABD$  的体积  $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

求  $A$  到平面  $PBC$  的距离。

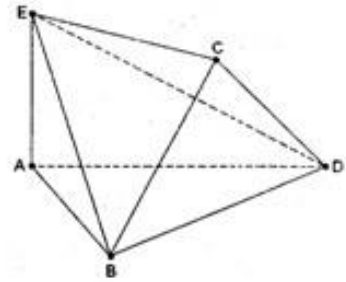


19. (本题 12 分) 为了了解某地高一学生的体能状况, 某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试, 将所得数据整理后, 画出频率分布直方图 (如图), 图中从左到右各小长方形的面积之比为 2: 4: 17: 15: 9: 3, 第二小组频数为 12.



- (1) 第二小组的频率是多少? 样本容量是多少?
- (2) 若次数在 110 以上为达标, 试估计全体高一学生的达标率为多少?
- (3) 通过该统计图, 可以估计该地学生跳绳次数的众数和中位数是多少?

20. (本题 12 分) 将边长为 2 的正方形 ABCD 沿对角线 BD 折叠, 使得平面 ABD ⊥ 平面 BCD, AE ⊥ 平面 ABD, 且 AE = √2.



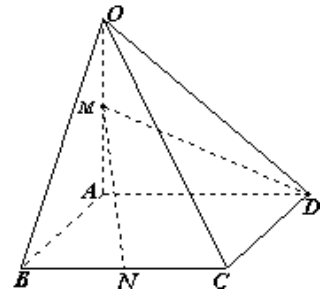
- (1) 求证: DE ⊥ AC;
- (2) 求 DE 与平面 BCE 所成角的正弦值.

21. (本题 12 分) 已知圆 C:  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ , 直线 l:  $mx - y + 1 - m = 0$ ,

- (1) 求证: 对  $m \in \mathbb{R}$ , 直线 l 与圆 C 总有两个不同交点;
- (2) 设 l 与圆 C 交与不同两点 A、B, 求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程;
- (3) 若定点 P (1, 1) 分弦 AB 为 AP:PB=1:2, 求此时直线 l 的方程.

22. (本题 12 分) 如图, 在四棱锥 O - ABCD 中, 底面 ABCD 是边长为 1 的菱形,  $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ , OA ⊥ 底面 ABCD, OA = 2, M 为 OA 的中点, N 为 BC 的中点.

- (1) 证明: 直线 MN ∥ 平面 OCD;
- (2) 求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小.



# 高二（上）第二次月考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 下列各数转化成十进制数后最小的数是 ( A )。

A:  $111111_{(2)}$     B:  $210_{(6)}$     C:  $1000_{(4)}$     D:  $81_{(9)}$

2. 以下命题正确的是 ( C )

A. 经过空间中的三点，有且只有一个平面

B. 空间中，如果两个角的两条边分别对应平行，那么这两个角相等

C. 空间中，两条异面直线所成角的范围是  $(0, \frac{\pi}{2}]$

D. 如果直线  $l$  平行于平面  $\alpha$  内的无数条直线，则直线  $l$  平行于平面  $\alpha$

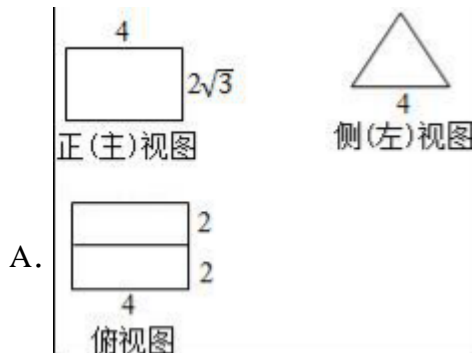
3. 向量  $\vec{a} = (-1, 0, 1), \vec{b} = (1, 2, 3)$ , 若  $k\vec{a} - \vec{b}$  与  $\vec{b}$  垂直，则实数  $k =$  ( A )

A. 7    B. -7    C. 6    D. -6

4. 已知  $a, b, c$  是三条不重合的直线， $\alpha, \beta$  是两个不重合的平面，直线  $l // \alpha$ ，则 ( A )

A.  $a // c, b // c \Rightarrow a // b$     B.  $a // \beta, b // \beta \Rightarrow a // b$     C.  $a // c, c // \alpha \Rightarrow a // \alpha$     D.  $a // l \Rightarrow a // \alpha$

5. 某几何体的三视图 (单位: cm) 如图，则这个几何体的表面积为 (单位:  $\text{cm}^2$ ) ( B )



甲		乙	
5	3	1	
8	6 3	2	4 5
9	7 4	3	2 3 6 7 8
1	4	4	5 7

(6 题)

A:  $24 + 4\sqrt{3}$     B:  $48 + 8\sqrt{3}$     C:  $24 + 8\sqrt{3}$     D:  $48 + 4\sqrt{3}$

6. 右图是某赛季甲、乙两名篮球运动员每场比赛得分统计的茎叶图，则甲、乙两人这几场比赛得分的中位数之和是 ( C )

A. 62    B. 63    C. 64    D. 65

7. 防疫站对学生进行身体健康调查. 红星中学共有学生 1600 名, 采用分层抽样法抽取一个容量为 200 的样本. 已知女生比男生少抽了 10 人, 则该校的女生人数应是 ( B )。

A.650 B.760 C.800 D.500

【解析】B 设该校的女生人数是  $x$ ，则男生人数是  $1600-x$ ，抽样比是  $\frac{200}{1600} = \frac{1}{8}$ ，则  $\frac{1}{8}x = \frac{1}{8}(1600-x)-10$ ，解得  $x=760$ 。

8. 已知  $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha, 1)$  和  $Q(2\cos\beta, 2\sin\beta, 1)$ ，则  $|\overrightarrow{PQ}|$  的取值范围是 ( C )

A. (1, 25) B. [1, 25] C. [1, 5] D. (1, 5)

9. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=2$ ， $BC=2$ ， $DD_1=3$ ，则  $AC$  与  $BD_1$  所成角的余弦值为( A )

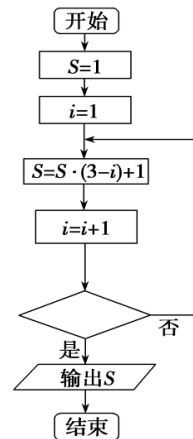
A. 0 B.  $\frac{3\sqrt{70}}{70}$  C.  $-\frac{3\sqrt{70}}{70}$  D.  $\frac{\sqrt{70}}{70}$

10. 已知矩形  $ABCD$  的顶点都在半径为 5 的球  $P$  的球面上，且  $AB=4$ ， $BC=3$ ，则棱锥  $P-ABCD$  的体积为 ( D )

A.  $5\sqrt{3}$  B.  $30\sqrt{3}$  C.  $\frac{10\sqrt{3}}{3}$  D.  $10\sqrt{3}$

11. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输出  $S$  的值为 1，则判断框内为( D )

A.  $i > 6?$  B.  $i > 5?$   
C.  $i \geq 3?$  D.  $i \geq 4?$



12. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，圆  $M$  的方程为  $x^2+y^2-8x-2y+16=0$ ，若直线  $kx-y+3=0$  上至少存在一点，使得以该点为圆心，半径为 1 的圆与圆  $M$  有公共点，则  $k$  的取值范围是 ( C )

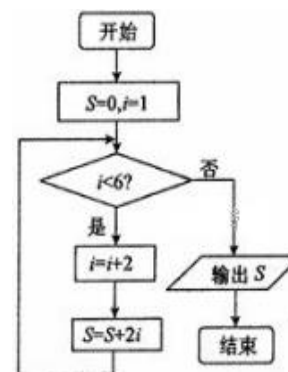
A.  $(-\infty, \frac{4}{3}]$  B.  $[0, +\infty)$  C.  $[-\frac{4}{3}, 0]$  D.  $(-\infty, \frac{4}{3}] \cup [0, +\infty)$

二、填空题 (每小题 5 分，共 20 分)

13. 平面直角坐标系中，直线  $3x-y+2=0$  关于点  $(1, 1)$  对称的直线方程是  $3x-y-6=0$ 。

14. 执行如图所示的程序框图，则输出  $S$  的结果为 17。

15. 若 1,2,3,4,  $m$  这五个数的平均数为 3，则这五个数的



方差为 2 .

解析: 由  $\frac{1+2+3+4+m}{5}=3$ , 得  $m=5$ , 所以这五个数的方差为  $\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$ .

答案: 2

16. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $AA_1=9$ ,  $BC=6\sqrt{3}$ , N 为 BC 的中点, 则直线  $D_1C_1$  与平面  $A_1B_1N$  的距离是 9 .

### 三、解答题

17. 甲、乙两台机床同时加工直径为  $100mm$  的零件, 为了检验产品的质量, 从产品中各随机抽出 6 件进行测量, 测得数据如下表(单位:  $min$ ):

甲机床	99	100	98	100	100	103
乙机床	99	100	102	99	100	100

(1) 分别计算两组数据的平均数与方差;

(2) 根据(1)的计算结果, 你能知道哪一台机床加工这种零件更符合 requirements 吗?

答案详解

$$\text{解: (1)} \quad \bar{x}_{\text{甲}} = 100 + \frac{1}{6}(-1 + 0 - 2 + 0 + 0 + 3) = 100$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = 100 + \frac{1}{6}(-1 + 0 + 2 - 1 + 0 + 0) = 100$$

$$S_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{6}[(99-100)^2 + (100-100)^2 + (98-100)^2 + (100-100)^2 + (100-100)^2 + (103-100)^2]$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 0 + 4 + 0 + 0 + 9) = \frac{7}{3}$$

$$S_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{6}[(99-100)^2 + (100-100)^2 + (102-100)^2 + (99-100)^2 + (100-100)^2 + (100-100)^2]$$

$$= \frac{1}{6} (1+0+4+1+0+0) = 1 ;$$

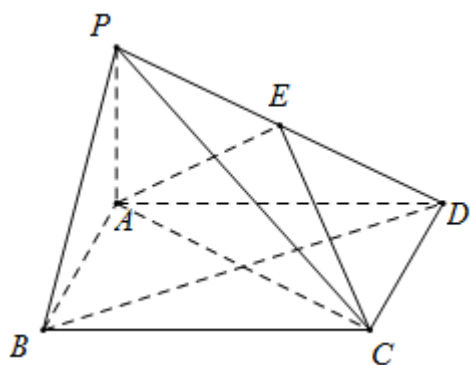
(2)由(1)可以知道,  $\bar{x}_{\square} = \bar{x}_{\square}$ , 而  $S_{\square}^2 > S_{\square}^2$

∴ 乙机床加工这种零件更符合要求.

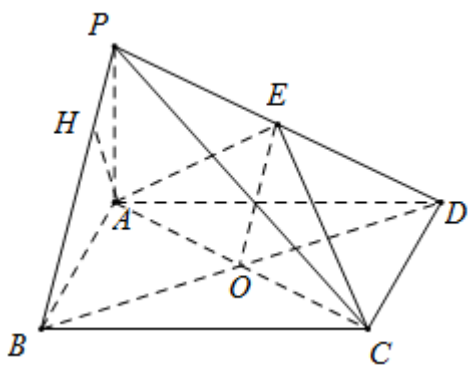
18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $E$  为  $PD$  的中点.

(I) 证明:  $PB \parallel$  平面  $AEC$ ;

(II) 设  $AP = 1$ ,  $AD = \sqrt{3}$ , 三棱锥  $P-ABD$  的体积  $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , 求  $A$  到平面  $PBC$  的距离.



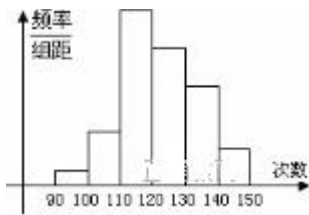
答案详解



(I) 设  $BD$  与  $AC$  的交点为  $O$ , 连结  $EO$ . 因为  $ABCD$  为矩形, 所以  $O$  为  $BD$  的中点, 又  $E$  为  $PD$  的中点, 所以  $EO \parallel PB$ .  $EO \subset$  平面  $AEC$ ,  $PB \not\subset$  平面  $AEC$ , 所以  $PB \parallel$  平面  $AEC$ .

(II)  $V = \frac{1}{6}PA \cdot AB \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{6}AB$ 。由  $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，可得  $AB = \frac{3}{2}$ 。作  $AH \perp PB$  交  $PB$  于  $H$ 。由题设知  $BC \perp$  平面  $PAB$ ，所以  $BC \perp AH$ ，故  $AH \perp$  平面  $PBC$ ，又  $AH = \frac{PA \cdot AB}{PB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 。所以  $A$  到平面  $PBC$  的距离为  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 。

19. 为了了解某地高一学生的体能状况，某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试，将所得数据整理后，画出频率分布直方图（如图），图中从左到右各小长方形的面积之比为 2: 4: 17: 15: 9: 3，第二小组频数为 12。



- (1) 第二小组的频率是多少？样本容量是多少？
- (2) 若次数在 110 以上为达标，试估计全体高一学生的达标率为多少？
- (3) 通过该统计图，可以估计该地学生跳绳次数的众数和中位数是多少？

解:(1)  $\because$  从左到右各小长方形的面积之比为 2: 4: 17: 15: 9: 3，  
第二小组频数为 12。

$$\therefore \text{样本容量是 } \frac{(2+4+17+15+9+3) \times 12}{4} = 150,$$

$$\therefore \text{第二小组的频率是 } \frac{12}{150} = 0.08.$$

(2)  $\because$  次数在 110 以上为达标，

$$\therefore \text{在这组数据中达标的个体数一共有 } 17+15+9+3,$$

$$\therefore \text{全体学生的达标率估计是 } \frac{17+15+9+3}{50} = 0.88 \dots 6 \text{ 分}$$

(3) 在频率分布直方图中最高的小长方形的底边的中点就是这组数据的众数，

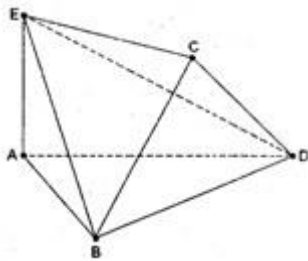
即  $\frac{110+120}{2} = 115$ , ...7 分

处在把频率分布直方图所有的小长方形的面积分成两部分的一条垂直与横轴的线对应的横标就是中位数 121.3...8 分

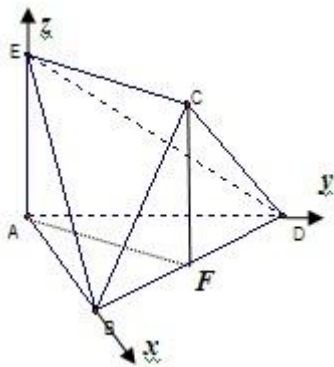
20. 将边长为 2 的正方形  $ABCD$  沿对角线  $BD$  折叠, 使得平面  $ABD \perp$  平面  $BCD$ ,  $AE \perp$  平面  $ABD$ , 且  $AE = \sqrt{2}$ .

(I) 求证:  $DE \perp AC$ ;

(II) 求  $DE$  与平面  $BCE$  所成角的正弦值.



(I) 以  $A$  为坐标原点,  $AB, AD, AE$  所在的直线分别为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系  $A-xyz$



则  $E(0, 0, \sqrt{2}), B(2, 0, 0), D(0, 2, 0)$

取  $BD$  的中点  $F$ , 并连接  $CF, AF$ , 由题意可得  $CF \perp BD$  且  $AF = CF = \sqrt{2}$

又  $\because$  平面  $BDA \perp$  平面  $BDC \therefore CF \perp$  平面  $BDA$ ,

所以  $C$  的坐标为  $C(1, 1, \sqrt{2})$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = (0, -2, \sqrt{2}), \overrightarrow{AC} = (1, 1, \sqrt{2})$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = (0, -2, \sqrt{2}) \cdot (1, 1, \sqrt{2}) = 0$$

故  $DE \perp AC$

(II) 设平面  $BCE$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$  则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x - \sqrt{2}z = 0 \\ x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} z = \sqrt{2}x \\ y = -x \end{cases}$$

$$\text{令 } x=1 \text{ 得 } \vec{n} = (1, -1, \sqrt{2}) \quad \text{又 } \overrightarrow{DE} = (0, -2, \sqrt{2})$$

设平面  $DE$  与平面  $BCE$  所成角为  $\theta$ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{DE}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

21. 已知圆  $C: x^2 + (y-1)^2 = 5$ , 直线  $l: mx - y + 1 - m = 0$ 。

(I) 求证: 对  $m \in \mathbb{R}$ , 直线  $l$  与圆  $C$  总有两个不同交点;

(II) 设  $l$  与圆  $C$  交与不同两点  $A, B$ , 求弦  $AB$  的中点  $M$  的轨迹方程;

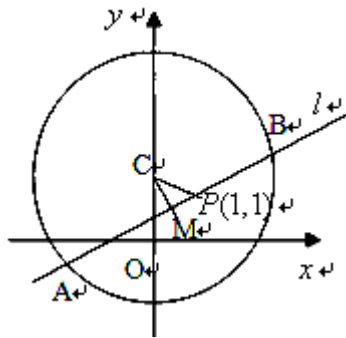
(III) 若定点  $P(1, 1)$  分弦  $AB$  为  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ , 求此时直线  $l$  的方程

(I) 证明: 圆  $C: x^2 + (y-1)^2 = 5$ , 可得圆心  $C(0, 1)$ , 半径为  $\sqrt{5}$ 。

$\therefore$  圆心  $C$  到直线  $l: mx - y + 1 - m = 0$  的距离

$$d = \frac{|-m|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq \frac{|m|}{|2m|} = \frac{1}{2} < \sqrt{5}$$

$\therefore$  直线  $l$  与圆  $C$  相交, 即直线  $l$  与圆  $C$  总有两个不同交点;



(II)解:当 M 与 P 不重合时,连接 CM、CP,则  $CM \perp MP$ ,

$$\therefore |CM|^2 + |MP|^2 = |CP|^2,$$

设  $M(x, y)(x \neq 1)$ , 则  $x^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ,

化简得:  $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0(x \neq 1)$ ,

当 M 与 P 重合时,  $x = y = 1$  也满足上式.

故弦 AB 中点的轨迹方程是  $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$ .

(III)解:设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 由  $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ , 得  $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ ,

$$\therefore 1 - x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 1), \text{化简的 } x_2 = 3 - 2x_1 \dots (1)$$

$$\text{又 } \begin{cases} mx - y + 1 - m = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \text{消去得 } (1 + m^2)x^2 - 2m^2x + m^2 - 5 = 0 \dots (\times)$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2m^2}{1 + m^2} \dots (2)$$

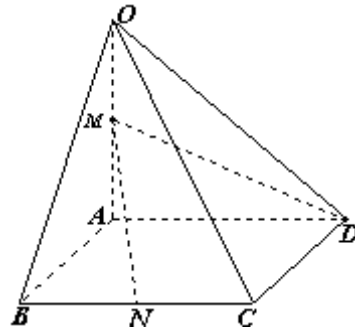
由(1)(2)计算得出  $x_1 = \frac{3 + m^2}{1 + m^2}$ , 带入  $(\times)$  式计算得出  $m = \pm 1$ ,

$\therefore$  直线 l 的方程为  $x - y = 0$  或  $x + y - 2 = 0$ .

22.如图,在四棱锥  $O-ABCD$  中,底面  $ABCD$  是边长为 1 的菱形,  $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ ,

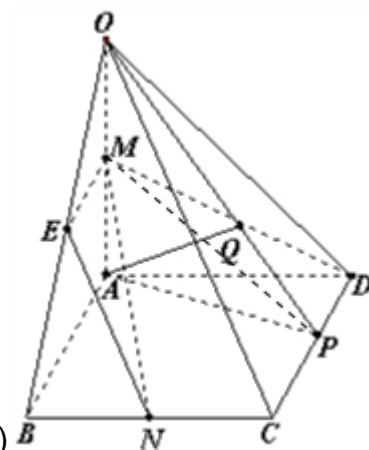
$OA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $OA = 2$ ,  $M$  为  $OA$  的中点,  $N$  为  $BC$  的中点.

(I)证明:直线  $MN \parallel$  平面  $OCD$ ;



(II)求异面直线  $AB$  与  $MD$  所成角的大小.

答案详解



方法一(综合法)

(I)取  $OB$  中点  $E$ , 连接  $ME, NE$ .

$$\because ME \parallel AB, AB \parallel CD,$$

$$\therefore ME \parallel CD.$$

又  $\because NE \parallel OC,$

$$\therefore \text{平面 } MNE \parallel \text{平面 } OCD,$$

$$\therefore MN \parallel \text{平面 } OCD.$$

(II)  $\because CD \parallel AB, \therefore \angle MDC$  或其补角为异面直线  $AB$  与  $MD$  所成的角.

作  $AP \perp CD$  于  $P$ , 连接  $MP, \because OA \perp$  平面  $ABCD, \therefore CD \perp MP,$

$$\therefore \angle ADP = \frac{\pi}{4}, \therefore DP = \frac{\sqrt{2}}{2}, MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \cos \angle MDP = \frac{DP}{MD} = \frac{1}{2}, \angle MDC = \angle MDP = \frac{\pi}{3}.$$

$\therefore AB$  与  $MD$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{3}$ .

方法二(向量法)

作  $AP \perp CD$  于点  $P$ , 如图, 分别以  $AB, AP, AO$ , 所在直线为  $x, y, z$  轴建立坐标系.

$$A(0,0,0), B(1,0,0), P(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0),$$

$$D(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), O(0,0,2) M(0,0,1), N(1-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$$

$$(I) \quad \overrightarrow{MN} = (1-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1), \overrightarrow{OP} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2) \quad \overrightarrow{OD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2)$$

设平面  $OCD$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = \sqrt{2}, \text{计算得出 } \vec{n} = (0, 4, \sqrt{2}),$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = (1-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -1) \cdot (0, 4, \sqrt{2}) = 0$$

$\therefore MN \parallel$  平面  $OCD$ .

(II) 设  $AB$  与  $MD$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0), \overrightarrow{MD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{MD}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{MD}|} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ , 即 AB 与 MD 所成角的大小为  $\frac{\pi}{3}$ .