苏州市2018届高三调研测试

数学Ⅰ试题

2018．1

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共4页，包含填空题（第1题 – 第14题）、解答题（第15题 – 第20题）．本卷满分160分，考试时间为120分钟．考试结束后，请将答题卡交回．
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置．
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效．作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔．请注意字体工整，笔迹清楚．
4. 如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．
5. 请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损．一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔．

参考公式：球的表面积公式 $S=4\pi r^2$，其中 r 为球的半径．

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．不需要写出解答过程，请把答案直接填在答题卡相应位置上．

1．已知i为虚数单位，复数 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$ 的模为__▲__．

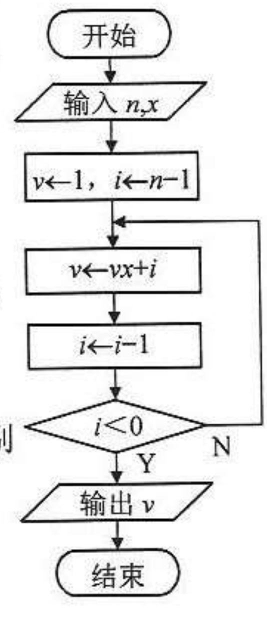
2．已知集合 $A=\{1,2^a\}$，$B=\{-1,1,4\}$，且 $A\subseteq B$，则正整数 $a=$__▲__．

3．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y^2=-8x$ 的焦点坐标为__▲__．

4．苏州轨道交通1号线每5分钟一班，其中，列车在车站停留0.5分钟，假设乘客到达站台的时刻是随机的，则该乘客到达站台立即能乘上车的概率为__▲__．

5．已知 $4^a=2$，$\log_a x=2a$，则正实数 $x=$__▲__．

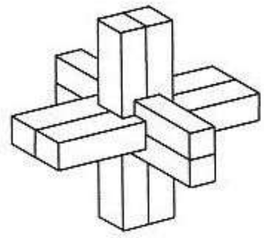
6．秦九韶是我国南宋时期的数学家，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法．右边的流程图是秦九韶算法的一个实例．若输入 n，x 的值分别为3，3，则输出 v 的值为__▲__．



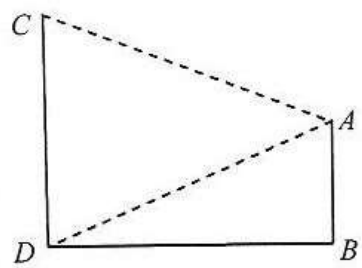
7. 已知变量 x，y 满足 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\x+y\geqslant 0,\\x-y+3\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最大值为 ▲ .

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\dfrac{S_6}{S_3}=-\dfrac{19}{8}$，$a_4-a_2=-\dfrac{15}{8}$，则 a_3 的值为 ▲ .

9. 鲁班锁是中国传统的智力玩具，起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构，它的外观是如图所示的十字立方体，其上下、左右、前后完全对称，六根等长的正四棱柱体分成三组，经 90° 榫卯起来．若正四棱柱的高为 5，底面正方形的边长为 1，现将该鲁班锁放进一个球形容器内，则该球形容器的表面积至少为 ▲ .（容器壁的厚度忽略不计，结果保留 π）



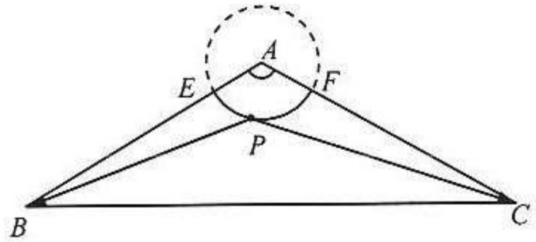
10. 如图，两座建筑物 AB，CD 的高度分别是 9m 和 15m，从建筑物 AB 的顶部 A 看建筑物 CD 的张角 $\angle CAD=45°$，则这两座建筑物 AB 和 CD 的底部之间的距离 $BD=$ ▲ m.



11. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知过点 $A(2,-1)$ 的圆 C 和直线 $x+y=1$ 相切，且圆心在直线 $y=-2x$ 上，则圆 C 的标准方程为 ▲ .

12. 已知正实数 a，b，c 满足 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=1$，$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{c}=1$，则 c 的取值范围是 ▲ .

13. 如图，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\angle BAC=120°$，$AB=AC=4$，以 A 为圆心，1 为半径的圆分别交 AB，AC 与点 E，F，点 P 是劣弧 $\overset{\frown}{EF}$ 上的一点，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围是 ▲ .



14. 已知直线 $y=a$ 分别与直线 $y=2x-2$，曲线 $y=2e^x+x$ 交于点 A，B，则线段 AB 长度的最小值为 ▲ .

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=(\sqrt{3}\cos x+\sin x)^2-2\sqrt{3}\sin 2x$．

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值，并写出 $f(x)$ 取得最小值时自变量 x 的取值集合；

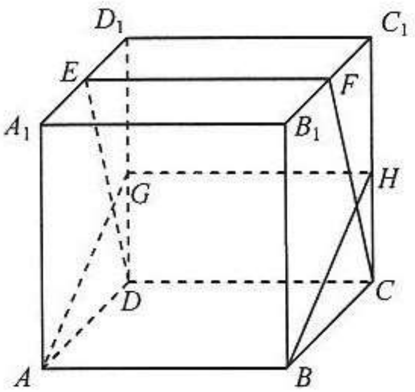
（2）若 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，求函数 $f(x)$ 的单调增区间．

16．（本小题满分 14 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 E，F，G，H 分别是 A_1D_1，B_1C_1，D_1D，C_1C 的中点．

（1）求证：EF // 平面 $ABHG$；

（2）求证：平面 $ABHG\perp$ 平面 $CFED$．

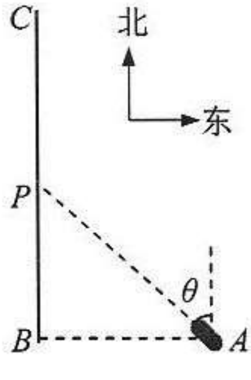


17．（本小题满分 14 分）

如图，B,C 分别是海岸线上的两个城市，两城市间由笔直的海滨公路相连，B，C 之间的距离为 100km，海岛 A 在城市 B 的正东方 50km处．从海岛 A 到城市 C，先乘船按北偏西 θ 角（$\alpha<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，其中锐角 α 的正切值为 $\frac{1}{2}$）航行到海岸公路 P 处登陆，再换乘汽车到城市 C．已知船速为 25km/h，车速为 75km/h．

（1）试建立由 A 经 P 到 C 所用时间与 θ 的函数解析式；

（2）试确定登陆点 P 的位置，使所用时间最少，并说明理由．

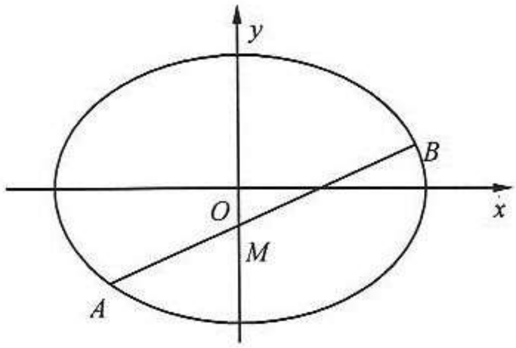


18.（本小题满分 16 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆上动点 P 到一个焦点的距离的最小值为 $3(\sqrt{2}-1)$.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）已知过点 $M(0,-1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，试判断以 AB 为直径的圆是否恒过定点，并说明理由.



19.（本小题满分 16 分）

已知各项是正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

（1）若 $S_n+S_{n-1}=\dfrac{a_n^2+2}{3}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$），且 $a_1=2$.

① 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

② 若 $S_n\leqslant\lambda\cdot 2^{n+1}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围；

（2）数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q（$q>0$， $q\neq 1$）的等比数列，且 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 10^{T_n}．若存在正整数 k，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\dfrac{T_{(k+1)n}}{T_{kn}}$ 为定值，求首项 a_1 的值.

20.（本小题满分 16 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2, & x<0,\\ e^x-ax, & x\geqslant 0.\end{cases}$

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若方程 $f(-x)+f(x)=e^x-3$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有实数解，求实数 a 的取值范围；

（3）若存在实数 $m,n\in[0,2]$，且 $|m-n|\geqslant 1$，使得 $f(m)=f(n)$，求证：$1\leqslant\dfrac{a}{e-1}\leqslant e$.

2018 届高三调研测试

数学Ⅱ（附加题）

2018．1

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

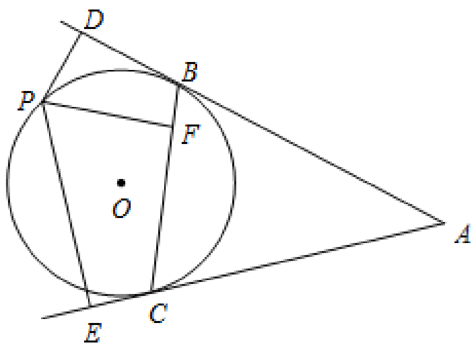
1. 本试卷只有解答题，供理工方向考生使用．本试卷第 21 题有 **A**、**B**、**C**、**D** 4 个小题供选做，每位考生在 4 个选做题中选答 2 题．若学生选做了 3 题或 4 题，则按选做题中的前 2 题计分．第 22、23 题为必答题．每小题 10 分，共 40 分．考试时间 30 分钟．考试结束后，请将答题卡交回．
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置．
3. 请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效．作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔．请注意字体工整，笔迹清楚．
4. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．
5. 请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损．一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔．

21.【选做题】本题包括 **A**、**B**、**C**、**D** 四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修 4－1：几何证明选讲（本小题满分 10 分）

如图，AB，AC 与圆 O 分别切于点 B，C，点 P 为圆 O 上异于点 B，C 的任意一点，$PD\perp AB$ 于点 D，$PE\perp AC$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F.

求证：$PF^2=PD\cdot PE$.



B．选修 4－2：矩阵与变换（本小题满分 10 分）

已知 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\ 7\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\beta}$.

C．选修 4－4：坐标系与参数方程（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=t-3 \end{cases}$（$t$ 为参数），以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$，若直线 l 与曲线 C 相交于 A，B 两点，求△AOB 的面积．

D．选修 4－5：不等式选讲（本小题满分 10 分）

已知 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2+c^2=1$，若 $|x-1|+|x+1|\geqslant(a-b+c)^2$ 对一切实数 a，b，c 恒成立，求实数 x 的取值范围．

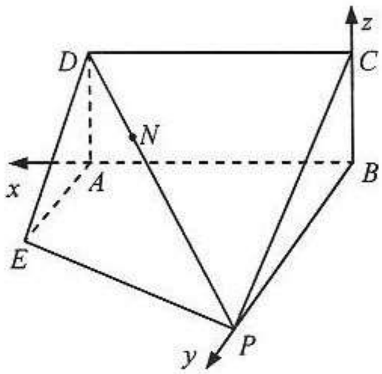
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分 10 分）

如图，已知矩形 $ABCD$ 所在平面垂直于直角梯形 $ABPE$ 所在平面于直线 AB，且 $AB=BP=2$，$AD=AE=1$，$AE\perp AB$，且 $AE//BP$．

（1）求平面 PCD 与平面 $ABPE$ 所成的二面角的余弦值；

（2）线段 PD 上是否存在一点 N，使得直线 BN 与平面 PCD 所成角的正弦值等于 $\dfrac{2}{5}$？若存在，试确定点 N 的位置；若不存在，请说明理由．



23．（本小题满分 10 分）

在正整数集上定义函数 $y=f(n)$，满足 $f(n)[f(n+1)+1]=2[2-f(n+1)]$，且 $f(1)=2$．

（1）求证：$f(3)-f(2)=\dfrac{9}{10}$；

（2）是否存在实数 a，b，使 $f(n)=\dfrac{1}{a(-\frac{3}{2})^n-b}+1$，对任意正整数 n 恒成立，并证明你的结论．

苏州市 2018 届高三调研测试数学试卷参考答案

一、填空题（共 70 分）

1． $\sqrt{3}$　**2．** 2　**3．** $(-2,0)$　**4．** $\dfrac{1}{10}$　**5．** $\dfrac{1}{2}$　**6．** 48　**7．** -9　**8．** $\dfrac{9}{4}$　**9．** 30π

10． 18　**11．** $(x-1)^2+(y+2)^2=2$　**12．** $(1,\dfrac{4}{3}]$　**13．** $[-11,-9]$　**14．** $\dfrac{3+\ln 2}{2}$

二、解答题（共 90 分）

15. 解（1） $f(x)=(\sqrt{3}\cos x+\sin x)^2-2\sqrt{3}\sin 2x$

$=3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin 2x$

$=\dfrac{3(1+\cos 2x)}{2}+\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+2$.

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\pi$，即 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}\,(k\in\mathbf{Z})$ 时，$f(x)$ 取得最小值 0.

此时，$f(x)$ 取得最小值时自变量 x 的取值集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

（2）因为 $f(x)=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+2$，

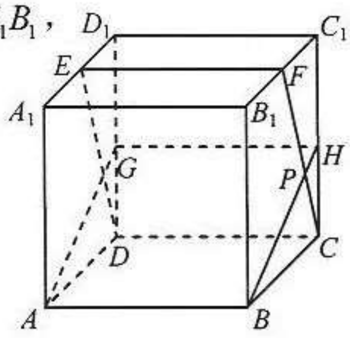
令 $\pi+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2\pi+2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，

又 $x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，令 $k=-1$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right]$，令 $k=0$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

所以函数在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 的单调增区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

16. 证明：（1）因为 E，F 是 A_1D_1，B_1C_1 的中点，所以 $EF\,/\!/\,A_1B_1$，



在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B_1\,/\!/\,AB$，

所以 $EF\,/\!/\,AB$.

又 $EF\not\subset$ 平面 $ABHG$，$AB\subset$ 平面 $ABHG$，

所以 $EF\,/\!/$ 平面 $ABHG$.

（2）在正方体 $ABCD–A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD\perp$ 平面 BB_1C_1C，

又 $BH\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $BH\perp CD$．①

设 $BH\cap CF=P$，$\triangle BCH\cong\triangle CC_1F$，所以 $\angle HBC=\angle FCC_1$，

因为 $\angle HBC+\angle PHC=90°$，所以 $\angle FCC_1+\angle PHC=90°$.

所以 $\angle HPC=90°$，即 $BH\perp CF$．②

由①②，又$DC\cap CF=C$，DC，$CF\subset$平面$CFED$，

所以$BH\perp$平面$CFED$.

又$BH\subset$平面$ABHG$，

所以平面$ABHG\perp$平面$CFED$.

17. 解（1）由题意，轮船航行的方位角为θ，所以$\angle BAP=90^\circ-\theta$，$AB=50$，

则$AP=\dfrac{50}{\cos(90^\circ-\theta)}=\dfrac{50}{\sin\theta}$，$BP=50\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{50\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}=\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}$.

$PC=100-BP=100-\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}$.

由A到P所用的时间为$t_1=\dfrac{AP}{25}=\dfrac{2}{\sin\theta}$，

由P到C所用的时间为$t_2=\dfrac{100-\dfrac{50\cos\theta}{\sin\theta}}{75}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}$，

所以由A经P到C所用时间与θ的函数关系为

$f(\theta)=t_1+t_2=\dfrac{2}{\sin\theta}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\cos\theta}{3\sin\theta}=\dfrac{6-2\cos\theta}{3\sin\theta}+\dfrac{4}{3}$.

函数$f(\theta)$的定义域为$(\alpha,\dfrac{\pi}{2}]$，其中锐角α的正切值为$\dfrac{1}{2}$.

（2）由（1），$f(\theta)=\dfrac{6-2\cos\theta}{3\sin\theta}+\dfrac{4}{3}$，$\theta\in(\alpha,\dfrac{\pi}{2}]$，

$f'(\theta)=\dfrac{6(1-3\cos\theta)}{9\sin^2\theta}$，令$f'(\theta)=0$，解得$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，

设$\theta_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使$\cos\theta_0=\dfrac{1}{3}$

θ	(α,θ_0)	θ_0	$(\theta_0,\dfrac{\pi}{2})$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	减函数	极小值	增函数

所以，当$\theta=\theta_0$时函数$f(\theta)$取得最小值，此时$BP=\dfrac{50\cos\theta_0}{\sin\theta_0}=\dfrac{25\sqrt{2}}{2}\approx17.68$ km，

答：在BC上选择距离B为17.68 km 处为登陆点，所用时间最少. ………… 14 分

（注：结果保留根号，不扣分）

18. 解（1）由题意$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故$a=\sqrt{2}c$，

又椭圆上动点P到一个焦点的距离的最小值为$3(\sqrt{2}-1)$，所以$a-c=3\sqrt{2}-3$，

解得$c=3$，$a=3\sqrt{2}$，所以$b^2=a^2-c^2=9$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

（2）当直线 l 的斜率为 0 时，令 $y=-1$，则 $x=\pm 4$，

此时以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+(y+1)=16$.

当直线 l 的斜率不存在时，以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=9$，

联立 $\begin{cases} x^2+(y+1)=16, \\ x^2+y^2=9, \end{cases}$ 解得 $x=0, y=3$，即两圆过点 $T(0,3)$.

猜想以 AB 为直径的圆恒过定点 $T(0,3)$.

对一般情况证明如下：

设过点 $M(0,-1)$ 的直线 l 的方程为 $y=kx-1$ 与椭圆 C 交于 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases} y=kx-1, \\ x^2+2y^2=18, \end{cases}$ 整理得 $(1+2k^2)x^2-4kx-16=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k}{1+2k^2}, x_1x_2=-\dfrac{16}{1+2k^2}$.

因为 $\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1,y_1-3)\cdot(x_2,y_2-3)=x_1x_2+y_1y_2-3(y_1+y_2)+9$

$=x_1x_2+(kx_1-1)(kx_2-1)-3(kx_1-1+kx_2-1)+9=(k^2+1)x_1x_2-4k(x_1+x_2)+16$

$=\dfrac{-16(k^2+1)}{1+2k^2}-\dfrac{16k^2}{1+2k^2}+16=\dfrac{-16(1+2k^2)}{1+2k^2}+16=0$，

所以 $TA\perp TB$.

所以存在以 AB 为直径的圆恒过定点 T，且定点 T 的坐标为 $(0,3)$.

19. 解（1）①当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n+S_{n-1}=\dfrac{a_n^2+2}{3}$， ①

则 $S_{n+1}+S_n=\dfrac{a_{n+1}^2+2}{3}$， ②

②-①得 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3}(a_{n+1}^2-a_n^2)$，即 $a_{n+1}-a_n=3$，$n\geqslant 2$.

当 $n=2$ 时，由①知 $a_1+a_2+a_1=\dfrac{a_2^2+2}{3}$，即 $a_2^2-3a_2-10=0$，

解得 $a_2=5$ 或 $a_2=-2$（舍），

所以 $a_2-a_1=3$，即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且首项 $a_1=3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n-1$.

（注：不验证 $a_2-a_1=3$ 扣 1 分）

②由①知，$a_n=3n-1$，所以 $S_n=\dfrac{n(3n-1+2)}{2}=\dfrac{3n^2+n}{2}$，

由题意可得$\lambda \geqslant \frac{S_n}{2^{n+1}} = \frac{3n^2+n}{2^{n+2}}$对一切$n \in \mathbf{N}^*$恒成立，

记$c_n = \frac{3n^2+n}{2^{n+2}}$，则$c_{n-1} = \frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2^{n+1}}$，$n \geqslant 2$，

所以$c_n - c_{n-1} = \frac{-3n^2+11n-4}{2^{n+2}}$，$n \geqslant 2$，

当$n>4$时，$c_n < c_{n-1}$，当$n=4$时，$c_4 = \frac{13}{16}$，且$c_3 = \frac{15}{16}$，$c_2 = \frac{7}{8}$，$c_1 = \frac{1}{2}$，

所以当$n=3$时，$c_n = \frac{3n^2+n}{2^{n+2}}$取得最大值$\frac{15}{16}$，

所以实数λ的取值范围为$[\frac{15}{16},+\infty)$.

（2）由题意，设$a_n = a_1 q^{n-1}$（$q>0, q \neq 1$），$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = 10^{T_n}$，两边取常用对数，

$T_n = \lg a_1 + \lg a_2 + \cdots + \lg a_n$.

令$b_n = \lg a_n = n\lg q + \lg a_1 - \lg q$，

则数列$\{b_n\}$是以$\lg a_1$为首项，$\lg q$为公差的等差数列，

若$\frac{T_{(k+1)n}}{T_{kn}}$为定值，令$\frac{T_{(k+1)n}}{T_{kn}} = \mu$，则$\frac{(k+1)n\lg a_1 + \frac{(k+1)n[(k+1)n-1]}{2}\lg q}{kn\lg a_1 + \frac{kn(kn-1)}{2}\lg q} = \mu$，

即$\{[(k+1)^2 - \mu k^2]\lg q\}n + [(k+1) - \mu k](\lg \frac{a_1^2}{q})\lg q = 0$对$n \in \mathbf{N}^*$恒成立，

因为$q>0, q \neq 1$，问题等价于$\begin{cases} (k+1)^2 - \mu k^2 = 0, \\ (k+1) - \mu k = 0 \text{或} a_1^2 = q. \end{cases}$

将$\frac{k+1}{k} = \sqrt{\mu}$代入$(k+1) - \mu k = 0$，解得$\mu = 0$或$\mu = 1$.

因为$k \in \mathbf{N}^*$，所以$\mu > 0, \mu \neq 1$，

所以$a_1^2 = q$，又$a_n > 0$, 故$a_1 = \sqrt{q}$.

20. 解（1）当$a=-2$时，$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2, x<0, \\ \mathrm{e}^x + 2x, \quad x \geqslant 0, \end{cases}$

当$x<0$时，$f(x) = -x^3 + x^2$，则$f'(x) = -3x^2 + 2x = -x(3x-2)$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$（舍），所以 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，
所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上为减函数.
当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-2x$，$f'(x)=e^x-2$，
令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln 2$，当 $0<x<\ln 2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\ln 2$ 时，$f'(x)>0$，
所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\ln 2)$ 上为减函数，在区间 $(\ln 2,+\infty)$ 上为增函数，
且 $f(0)=1>0$.
综上，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\ln 2)$，单调增区间为 $(\ln 2,+\infty)$.

（2）设 $x>0$，则 $-x<0$，所以 $f(-x)+f(x)=x^3+x^2+e^x-ax$，

由题意，$x^3+x^2+e^x-ax=e^x-3$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有解，

等价于 $a=x^2+x+\dfrac{3}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有解.

记 $g(x)=x^2+x+\dfrac{3}{x}(x>0)$，

则 $g'(x)=2x+1-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{2x^3+x^2-3}{x^2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+3x+3)}{x^2}$，

令 $g'(x)=0$，因为 $x>0$，所以 $2x^2+3x+3>0$，故解得 $x=1$，
当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，
所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
故函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $g(1)=5$.
要使方程 $a=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有解，当且仅当 $a\geqslant g(x)_{\min}=g(1)=5$，
综上，满足题意的实数 a 的取值范围为 $[5,+\infty)$.

（3）由题意，$f'(x)=e^x-a$，
当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，
由 $f(m)=f(n)$，可得 $m=n$，与条件 $|m-n|\geqslant 1$ 矛盾，所以 $a>0$.
令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，
当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，
所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.
若存在 $m,n\in[0,2]$，$f(m)=f(n)$，则 $\ln a$ 介于 m，n 之间，
不妨设 $0\leqslant m<\ln a<n\leqslant 2$，
因为 $f(x)$ 在 $(m,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,n)$ 上单调递增，且 $f(m)=f(n)$，
所以当 $m\leqslant x\leqslant n$ 时，$f(x)\leqslant f(m)=f(n)$，
由 $0\leqslant m<n\leqslant 2$，$|m-n|\geqslant 1$，可得 $1\in[m,n]$，故 $f(1)\leqslant f(m)=f(n)$，
又 $f(x)$ 在 $(m,\ln a)$ 上单调递减，且 $0\leqslant m<\ln a$，所以 $f(m)\leqslant f(0)$.

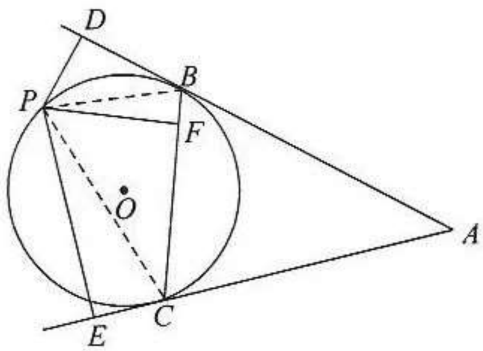
所以 $f(1)\leqslant f(0)$，同理 $f(1)\leqslant f(2)$．

即 $\begin{cases}\mathrm{e}-a\leqslant 1,\\ \mathrm{e}-a\leqslant \mathrm{e}^2-2a,\end{cases}$ 解得 $\mathrm{e}-1\leqslant a\leqslant \mathrm{e}^2-\mathrm{e}$，

所以 $1\leqslant \dfrac{a}{\mathrm{e}-1}\leqslant \mathrm{e}$．

2018 届高三调研测试数学附加题参考答案

21A 选修 4－1 几何证明选讲



证明 连 PB，PC，因为 $\angle PCF,\angle PBD$ 分别为同弧 BP 上的圆周角和弦切角，

所以 $\angle PCF=\angle PBD$．

因为 $PD\perp BD$，$PF\perp FC$，

所以 $\triangle PDB\backsim\triangle PFC$，故 $\dfrac{PD}{PF}=\dfrac{PB}{PC}$．

同理，$\angle PBF=\angle PCE$，

又 $PE\perp EC$，$PF\perp FB$，

所以 $\triangle PFB\backsim\triangle PEC$，故 $\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{PB}{PC}$．

所以 $\dfrac{PD}{PF}=\dfrac{PF}{PE}$，即 $PF^2=PD\cdot PE$．

21B 选修 4－2 矩阵与变换

解 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3$，

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$，解得

属于 λ_1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，属于 λ_2 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$．

令 $\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha}_1+n\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases}m+n=1,\\ m-n=7,\end{cases}$ 解得 $m=4,n=-3$．

所以 $\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{M}^4(4\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2)=4(\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}_1)-3(\boldsymbol{M}^4\boldsymbol{\alpha}_2)$

$$=4(\lambda_1^4\boldsymbol{\alpha}_1)-3(\lambda_2^4\boldsymbol{\alpha}_2)=4\times 3^4\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-3\times(-1)^4\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}321\\327\end{bmatrix}.$$

21C 选修 4－4 坐标系与参数方程

解 由曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=\dfrac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}$，得 $\rho^2\sin^2\theta=2\rho\cos\theta$.

所以曲线 C 的直角坐标方程是 $y^2=2x$.

由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=t-3\end{cases}$ (t 为参数)，得 $x-y-4=0$，

所以直线 l 的普通方程为 $x-y-4=0$．

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程 $y^2=2x$，得 $t^2-8t+7=0$，

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，

所以 $AB=\sqrt{2}|t_1-t_2|=\sqrt{2}\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{2}\sqrt{8^2-4\times 7}=6\sqrt{2}$，

因为原点到直线 $x-y-4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积是 $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\dfrac{1}{2}\times(6\sqrt{2})\times(2\sqrt{2})=12$．

21D 选修 4－5 不等式选讲

解　因为 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2+c^2=1$，

由柯西不等式得 $(a-b+c)^2\leqslant(a^2+b^2+c^2)(1+1+1)=3$，

因为 $|x-1|+|x+1|\geqslant(a-b+c)^2$ 对一切实数 a，b，c 恒成立，

所以 $|x-1|+|x+1|\geqslant 3$．

当 $x<-1$ 时，$-2x\geqslant 3$，即 $x\leqslant-\dfrac{3}{2}$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2\geqslant 3$ 不成立；

当 $x>1$ 时，$2x\geqslant 3$，即 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$；

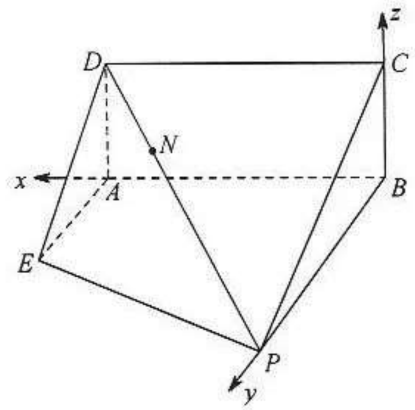
综上，实数 x 的取值范围为 $(-\infty,-\dfrac{3}{2}]\cup[\dfrac{3}{2},+\infty)$．

22. 解（1）因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEP$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEP=AB$，$BP\perp AB$，

所以 $BP\perp$ 平面 $ABCD$，又 $AB\perp BC$，所以直线 BA，BP，BC 两两垂直，

以 B 为原点，分别以 BA，BP，BC 为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 P（0，2，0），B（0，0，0），D（-2，0，1），E（2，1，0），C（0，0，1），

因为 $BC\perp$ 平面 $ABPE$，所以 $\overrightarrow{BC}=(0,0,1)$ 为平面 $ABPE$ 的一个法向量，



$\overrightarrow{PD}=(2,-2,1),\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$，设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ 2x-2y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $z=2$，故 $\boldsymbol{n}=(0,1,2)$，

设平面 PCD 与平面 $ABPE$ 所成的二面角为 θ，则

$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{2}{1\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

显然 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以平面 PCD 与平面 $ABPE$ 所成二面角的余弦值 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

（2）设线段 PD 上存在一点 N，使得直线 BN 与平面 PCD 所成角 α 的正弦值等于 $\dfrac{2}{5}$．

设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PD}=(2\lambda,-2\lambda,\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PN}=(2\lambda,2-2\lambda,\lambda)$．

由（1）知，平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,2)$，

所以$\cos<\overrightarrow{BN},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BN}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{9\lambda^2-8\lambda+4}}=\dfrac{2}{5}$，

即$9\lambda^2-8\lambda-1=0$，解得$\lambda=1$或$\lambda=-\dfrac{1}{9}$（舍去）.

当点N与点D重合时，直线BN与平面PCD所成角的正弦值为$\dfrac{2}{5}$.

23. 解（1）因为$f(n)[f(n+1)+1]=2[2-f(n+1)]$，整理得$f(n+1)=\dfrac{4-f(n)}{f(n)+2}$，

由$f(1)=2$，代入得$f(2)=\dfrac{4-2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$，$f(3)=\dfrac{4-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+2}=\dfrac{7}{5}$，

所以$f(3)-f(2)=\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{10}$.

（2）由$f(1)=2$，$f(2)=\dfrac{1}{2}$，可得$a=-\dfrac{4}{5},b=\dfrac{1}{5}$.

以下用数学归纳法证明

存在实数，$a=-\dfrac{4}{5},b=\dfrac{1}{5}$，使$f(n)=\dfrac{1}{-\frac{4}{5}(-\frac{3}{2})^n-\frac{1}{5}}+1$成立.

① 当$n=1$时，显然成立.

② 当$n=k$时，假设存在$a=-\dfrac{4}{5},b=\dfrac{1}{5}$，使得$f(k)=\dfrac{1}{-\frac{4}{5}(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}+1$成立，

那么，当$n=k+1$时，$f(k+1)=\dfrac{4-f(k)}{f(k)+2}=\dfrac{4-\left[\dfrac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}+1\right]}{\dfrac{1}{(-\frac{4}{5})(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}+1+2}$

$$=\frac{\frac{12}{5}(-\frac{3}{2})^k+\frac{8}{5}}{\frac{12}{5}(-\frac{3}{2})^k-\frac{2}{5}}=1+\frac{1}{\frac{6}{5}(-\frac{3}{2})^k-\frac{1}{5}}=\frac{1}{-\frac{4}{5}(-\frac{3}{2})^{k+1}-\frac{1}{5}}+1,$$

即当$n=k+1$时，存在$a=-\dfrac{4}{5},b=\dfrac{1}{5}$，使得$f(k+1)=\dfrac{1}{-\frac{4}{5}(-\frac{3}{2})^{k+1}-\frac{1}{5}}+1$成立.

由①，②可知，存在实数，$a=-\dfrac{4}{5},b=\dfrac{1}{5}$，使$f(n)=\dfrac{1}{a(-\frac{3}{2})^n-b}+1$对任意正整数$n$恒成立.